

**НАЦИОНАЛЬНАЯ МЕТАЛЛУРГИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
УКРАИНЫ**

Кафедра прикладной механики

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА, МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И
КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ К ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ
«СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ» ДЛЯ СТУДЕНТОВ
СПЕЦИАЛЬНОСТИ 6.133 ГАЛУЗЕВЕ МАШИНОБУДУВАННЯ
ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ**

Утверждено на заседании кафедры
прикладной механики
протокол № 1 от 28 августа 2019 г.

Днепр

УДК 531.8

Рабочая программа, методические указания и контрольные задания к изучению дисциплины «Сопротивление материалов» для студентов специальности 6.133 «Галузеве машинобудування» заочной формы обучения/ Переработано доц. И.Ю. Наумовой. - Днепр: НМетАУ, 2019. – 87 с.

Содержит 11 заданий по темам: «растяжение – сжатие», «кручение», «изгиб прямых брусьев», «сложное сопротивление», «устойчивость равновесия деформируемых систем», «статически неопределимые системы», «динамическая нагрузка» с примерами решения данных заданий. Рабочая программа соответствует рабочим программам дисциплины «Сопротивление материалов».

Предназначена для студентов специальности 6.133 «Галузеве машинобудування» заочной формы обучения в НМетАУ.

СОДЕРЖАНИЕ

	стр.
Введение.....	4
Общие методические указания.....	4
Методические указания к темам дисциплины.....	5
Т е м а 1. Основные понятия.....	5
Т е м а 2. Растяжение и сжатие	5
Т е м а 3. Сдвиг.....	7
Т е м а 4. Кручение.....	8
Т е м а 5. Геометрические характеристики плоских сечений	9
Т е м а 6. Теория напряженного состояния и теория прочности	10
Т е м а 7. Изгиб прямых брусьев	12
Т е м а 8. Сложное сопротивление	13
Т е м а 9. Устойчивость равновесия деформируемых систем.....	15
Т е м а 10. Расчет на прочность при напряжениях, циклически изменяющихся во времени.....	16
Т е м а 11. Динамическая нагрузка	17
Т е м а 12. Статически неопределимые системы.....	19
Указания о порядке выполнения контрольных заданий.....	19
Контрольные задания	22
Литература.....	27
Приложение.....	28
Методические указания и примеры выполнения расчетно-проектировочных работ (часть 1).....	40
Задача 1. Определение перемещений ступенчатого стержня.....	40
Задача 2. Расчет статически неопределимой стержневой системы.....	42
Задача 3. Расчет вала на кручение.....	46
Задача 5. Расчет статически определимых балок.....	49
Задача 6. Расчет статически неопределимой однопролетной балки.....	55
Литература.....	60
Методические указания и примеры выполнения расчетно-проектировочных работ(часть 2)	61
Задача 7. Расчет стержня на внецентренное сжатие.....	61
Задача 8. Построение эпюр внутренних усилий для пространственных брусьев с ломаной осью.....	64
Задача 9. Изгиб с кручением брусьев круглого сечения.....	66
Задача 10. Расчет стержня на устойчивость.....	72
Задача 11. Расчет статически неопределимых стержневых систем методом сил.....	75
Задача 12. Расчет на прочность при ударе.....	81
Приложения.....	84
Литература.....	87

ВВЕДЕНИЕ

Сопротивление материалов - наука о прочности, жесткости и устойчивости отдельных элементов машин, конструкций и сооружений.

Инженеру металлургических специальностей приходится сталкиваться с проектированием и эксплуатацией технологического оборудования. Поэтому умение рационально сочетать расчеты на прочность и надежность с экономической целесообразностью определяют развитие важнейшей отрасли народного хозяйства.

Настоящие методические указания и контрольные задания представляют собой переработанные разработки, выполненные А.В. Дарковым и Б.Н. Кутуковым, с уклоном к инженерным дисциплинам металлургических специальностей.

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Сопротивление материалов - одна из сложных и необходимых инженерных дисциплин, изучаемых в высших технических учебных заведениях. Занятия по этой дисциплине обязательно сопровождаются составлением конспекта лекций, решением задач и выполнением лабораторного практикума. После переработки каждой темы необходимо самостоятельно решить несколько задач. Следует также научиться делать выводы формул. При этом необходимо обратить особое внимание на физическую сущность явлений и на те допущения и ограничения, которые делаются в процессе выводов.

После изучения каждой темы надо ответить на вопросы для самопроверки. Это способствует лучшему усвоению материала.

До сдачи зачета необходимо выполнить контрольные работы и пройти лабораторный практикум.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ТЕМАМ ДИСЦИПЛИНЫ

Т е м а 1. Основные понятия

В этой теме даны основные понятия, которые необходимо хорошо усвоить. Особое внимание надо обратить на понятие деформаций и напряжений. Для определений напряжений пользуются методом сечений. Сущность его заключается в том, что твердое тело, находящееся в равновесии, разрезают (мысленно) на две части, отбрасывают одну из частей, заменяют влияние отброшенной части внутренними силами и составляют уравнение равновесия для оставшейся части, на которую действуют приложенные к ней внешние и внутренние силы, распределенные по сделанному сечению.

Литература: / 1, гл. 1, 3; 2, введение /

Вопросы для самопроверки

1. Какие деформации называются упругими?
2. Какие деформации называются остаточными (пластическими)?
3. Что называется напряжением в точке в данном сечении?
4. Какое напряжение называется нормальным?
5. Какое напряжение называется касательным?
6. В чем заключается сущность метода сечений?

Т е м а 2. Растяжение и сжатие

В этой теме рассмотрены простые случаи воздействия сил на стержень и содержится ряд вопросов (механические свойства материалов, выбор допускаемых напряжений, статически неопределимые задачи), встречающихся в других разделах курса.

Необходимо обратить внимание на то, что механические характеристики металла (предел пропорциональности, предел упругости,

13. В каких местах возникает концентрация напряжений?
14. От каких факторов зависит величина запаса прочности?
15. Какие задачи называются статически неопределимыми?
16. Каков общий порядок решения статически неопределимых задач?
17. Как находятся напряжения при изменении температуры?

18. Как находится удлинение стержня, растягиваемого собственным весом?

19. Что называется коэффициентом запаса прочности?

20. Как формулируется условие прочности?

Т е м а 3. Сдвиг

Касательные напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках равны между собой. Этот важный закон называется законом парности касательных напряжений. При изучении деформаций надо обратить внимание на то, что одна из диагоналей выделенного элемента, по граням которого действует касательные напряжения, удлиняется, а другая укорачивается; таким образом, явления растяжения-сжатия в сдвиге нельзя рассматривать изолированно друг от друга. Формулу закона Гука при сдвиге ($\tau = G\gamma$) легко запомнить ввиду полной аналогии ее с формулой закона Гука при растяжении-сжатии $\sigma = E\varepsilon$. Необходимо внимательно изучить о выборе допускаемых напряжений при сдвиге.

Следует обратить внимание на то, что расчеты заклепок, сварных соединений и врубок являются условными и что явление "среза" всегда осложнено наличием других напряжений, которыми для упрощения расчетов обычно пренебрегают. Надо уметь показывать на чертежах площадки, на которых возникают напряжения среза, смятия, скалывания.

Литература: / 1, гл. 8; 3, гл. 5 /.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется абсолютным и относительным сдвигом?
2. Как формулируется закон Гука при сдвиге?
3. Какой модуль упругости больше: E или G ?
4. Как находится условная площадь смятия заклепки?
5. По какому сечению в заклепочном соединении проводится проверка листов на разрыв?
6. Как рассчитываются стыковые, торцевые и фланговые швы?

Т е м а 4. Кручение

В случае центрального растяжения-сжатия нормальные напряжения распределяются в поперечном сечении стержня равномерно. При расчете на срезе обычно считают, что касательные напряжения также распределяются равномерно. В случае кручения круглого стержня касательные напряжения в поперечном сечении распределяются неравномерно, изменяясь по линейному закону - от нуля на оси до максимального значения у поверхности стержня. В связи с этим и возникла мысль о замене сплошного вала полым, материал сечения которого находится в более напряженной зоне и используется рациональнее.

Следует внимательно разобрать построение эпюры крутящихся моментов M_K , которая наглядно показывает изменение величины крутящего момента по длине вала. При вычислении напряжений в каком-либо поперечном сечении вала необходимо брать по эпюре M_K значений соответствующей ординаты.

Надо обратить внимание на то, как используется закон парности касательных напряжений для установления направления в точках контура прямоугольного поперечного сечения стержня. Наибольшие напряжения в таком сечении возникают в точках контура, ближе всего расположенных к оси кручения.

Литература: / 1, гл. 9; гл. 2 /.

Вопросы для самопроверки

1. Какие напряжения возникают в поперечном сечении круглого стержня при кручении?
2. Как находится их величина в произвольной точке поперечного сечения?
3. Возникают ли при кручении нормальные напряжения?
4. Чему равен полярный момент инерции круглого сечения?
5. Что называется моментом сопротивления при кручении? В каких единицах он измеряется?

6. Чему равен момент сопротивления кольцевого сечения? Почему нельзя сказать, что он равен разности моментов сопротивления наружного и внутреннего кругов?

7. Как вычисляется момент, передаваемый штивом, по мощности к числу оборотов?

8. Как находится величина угла закручивания?

9. Как производится расчет вала на прочность?

10. Как производится расчет вала на жесткость?

11. Как находятся максимальные напряжения при кручении стержня прямоугольного сечения?

12. Как вычисляются напряжения в пружинах?

13. Как определяются деформации пружин?

Т е м а 5. Геометрические характеристики плоских сечений

В теории изгиба важную роль играют моменты инерции, поэтому следует рассмотреть этот вопрос предварительно в виде самостоятельной темы. Перед изучением этой темы полезно по учебнику теоретической механики повторить материал о статическом моменте и о нахождении центра тяжести плоских фигур. При вычислении моментов инерции надо

помнить, что они представляют собой интегралы или типа $\int_F z^2 dF$ (осевой или экваториальный момент инерции относительно оси Y), или типа $\int_F zy dF$ (центробежный момент инерции относительно осей Z и Y).

Литература: / 1, гл. 2; 3, гл.2 /.

Вопросы для самопроверки

1. По каким формулам находят координаты центра тяжести плоской фигуры?

2. Чему равна сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей?

3. Какие оси называются главными?

4. Для каких фигур можно без вычислений установить положение главных центральных осей?
5. Относительно каких центральных осей осевые моменты инерции имеют наибольшее и наименьшее значения?
6. Какой из двух моментов инерции треугольника больше: относительно оси, проходящей через основание, или относительно оси, проходящей через вершину параллельно основанию?
7. Какой из двух моментов квадратного сечения больше: относительно центральной оси, проходящей параллельно сторонам, или относительно оси, проходящей через диагональ?
8. Какой из двух главных центральных моментов инерции полукруглого сечения больше: относительно оси, параллельной диаметру, ограничивающему сечение, или относительно перпендикулярной оси?

Т е м а 6. Теория напряженного состояния и теория прочности

Главные напряжения играют весьма важную роль при решении вопроса о прочности материала; одно из этих напряжений является наибольшим, а другое - наименьшим из всех нормальных напряжений для данной точки.

При линейном состоянии вопрос о прочности материала решается легко: надо определить опасное напряжение из опыта на простое растяжение (или сжатие), назначить коэффициент запаса и сравнить

главное напряжение σ с допускаемым напряжением $\sigma \leq [\sigma] = \frac{\sigma_0}{k}$.

В случае плоского или объемного напряженного состояния задача значительно осложняется, так как неизвестно, при какой комбинации числовых значений главных напряжений наступает опасное состояние материала. Необходимо, следовательно, найти напряжение, зависящее от главных напряжений, при котором возникает опасность разрушения, и затем числовое его значение сравнить с допускаемым напряжением, установленным из опыта на простое растяжение (сжатие). В зависимости от того, какой фактор по данной теории прочности считается решающим и создающим опасное состояние материала, получим различные расчетные формулы.

Литература: / 1, гл. 6, 7; 2, гл. 7, 8 /.

Вопросы для самопроверки

1. Какие имеются виды напряженного состояния материала?
2. В чем заключается закон парности касательных напряжений?
3. Чему равна сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам?
4. По каким площадкам возникают наибольшее и наименьшее нормальные напряжения?
5. Как производится графическое построение для определения напряжений в наклонных площадках в случае плоского напряженного состояния?
6. Как при помощи этого построения находятся главные напряжения?
7. Чему равно наибольшее касательное напряжение в случае плоского напряженного состояния?
8. Как находятся максимальные касательные напряжения в случае объемного напряженного состояния?
9. Как находятся деформации при плоском и объемном напряженном состояниях?
10. Как формулируется первая теория прочности?
11. Как находится расчетное напряжение по второй теории прочности?
12. Зависит ли расчетное напряжение по третьей теории прочности от величины σ_2 ?
13. Чему равна удельная работа деформации при объемном напряженном состоянии?

Т е м а 7. Изгиб прямых брусьев

Эта тема является самой большой и самой сложной темой курса сопротивления материалов; ее следует изучать постепенно, обращая особое внимание на решение задач. Сначала надо усвоить весьма важные понятия изгибающего момента M и поперечной силы Q и научиться свободно строить эпюры M и Q .

Необходимо помнить, что поперечная сила в данном сечении равна алгебраической сумме проекций сил, расположенных только по одну сторону от рассматриваемого сечения, на перпендикуляр к оси балки, а изгибающий момент в данном сечении равен алгебраической сумме моментов сил, расположенных только с одной стороны, относительно центральной оси поперечного сечения. В связи с этим рекомендуется – при вычислении, например, изгибающего момента в сечении балки как момента левых сил – закрывать чем-либо (рукой, книгой, листом бумаги) часть балки, расположенную правее рассматриваемого сечения, чтобы открытыми оставались только одни левые силы. Следует при этом иметь в виду, что можно рассматривать как одни левые, так и одни правые силы, в зависимости от того, с какой стороны проще получить выражения M и Q .

Весьма важное значение имеет теорема Журавского, устанавливающая зависимость между M и Q , с помощью которой можно проверять построение эпюр.

Необходимо обратить внимание на неравномерность распределения нормальных напряжений по высоте и на то, что прочность балки зависит от величины момента сопротивления W . Надо ясно представлять, каким путем можно увеличить момент сопротивления без расхода материала.

Литература: / 1, гл. 3, 10; 2, гл. 4 /.

Вопросы для самопроверки

1. Как находится изгибающий момент в каком-либо сечении балки?
2. В каком случае изгибающий момент считается положительным?
3. Как находится поперечная сила в каком-либо сечении балки?
4. Когда поперечная сила считается положительной?
5. Какая зависимость имеется между величинами M и Q ?
6. Как находится максимальный изгибающий момент?
7. Какой случай изгиба называется чистым изгибом?
8. По какой кривой изогнется балка в случае чистого изгиба?
9. Как изменяются нормальные напряжения по высоте балке?
10. Что называется нейтральным слоем и где он находится?
11. Что называется моментом сопротивления при изгибе?
12. Как выгоднее положить балку прямоугольного сечения при работе на изгиб: на ребро или плашмя?
13. Какое сечение имеет больший момент сопротивления при одинаковой площади: круглое или квадратное?
14. В каких плоскостях возникают касательные напряжения при изгибе, определяемые по формуле Журавского?
15. Как находится их величина?
16. Как находятся главные напряжения при изгибе?
17. Какие напряжения появляются в балке, если плоскость действия нагрузки не пройдет через центр изгиба?
18. Как пишется общее дифференциальное уравнение изогнутой балки?
19. Как находят постоянные интегрирования?
20. Как определяют наибольшую величину прогиба?
21. Что представляют собой уравнения правой части трех моментов?
22. Как определяют опорные реакции неразрезанной балки?
23. В чем заключаются преимущества метода начальных параметров?

Т е м а 8. Сложное сопротивление

Изучение сложного сопротивления обычно начинается с косо́го изгиба. Нейтральные линии при косо́м изгибе уже не перпендикулярны к плоскости внешних сил, а плоскость, в которой расположены прогибы при косо́м изгибе, не совпадает с плоскостью внешних сил. Явление косо́го изгиба особенно опасно для сечений со значительно отличающимися друг от друга главными моментами инерции (например, для двутавра); балки с таким сечением хорошо работают на изгиб в плоскости наибольшей жесткости, но даже при наибольших углах наклона плоскости внешних сил к плоскости наибольшей жесткости в балках возникают значительные дополнительные напряжения и деформации. Для балки круглого сечения косо́й изгиб невозмо́жен, так как все центральные оси такого сечения являются главными, и нейтральный слой всегда будет перпендикулярен к плоскости внешних сил. Косо́й изгиб невозмо́жен также и для квадратного сечения, но для такого сечения решение вопроса о прочности зависит от положения плоских внешних сил, так как моменты сопротивления квадратного сечения неодинаковы относительно различных центральных осей (хотя моменты инерции относительно всех центральных осей равны между собой, как и для круглого сечения). При расположении внешних сил в диагональной плоскости расчетные напряжения в балке квадратного сечения будут больше, чем в случае, когда плоскость внешних сил параллельна граням балки.

При определении напряжений в случае внецентренного растяжения или сжатия необходимо знать положение главных центральных осей сечения; именно от этих осей отсчитывают расстояние точки приложения силы и точки, в которой определяется напряжение.

Литература: / 3, гл. 10; 1, гл. 12 /.

Вопросы для самопроверки

1. Какой случай изгиба называется косым изгибом?
2. Возможен ли косой изгиб при чистом изгибе?
3. В каких точках поперечного сечения возникает наибольшее напряжение при косом изгибе?
4. Как находится положение нейтральной линии при косом изгибе?
5. Как пройдет нейтральная линия, если плоскость действия сил совпадает с диагональной плоскостью балки прямоугольного поперечного сечения?
6. Как определяются деформации при косом изгибе?
7. Может ли балка круглого поперечного сечения испытывать косой изгиб?
8. Как находят напряжения в произвольной точке поперечного сечения внецентренного растяжения или сжатия?
9. Чему равно напряжение в центре тяжести поперечного сечения при внецентренном растяжении или сжатии?
10. Какое положение занимает нейтральная линия, когда продольная сила приложена к вершине ядра сечения?
11. Какие напряжения возникают в поперечном сечении стержня при изгибе с кручением?
12. Как находятся опасные сечения стержня при изгибе с кручением?
13. В каких точках круглого сечения возникают наибольшие напряжения при изгибе с кручением?
14. Почему обыкновенно не учитывают касательные напряжения от изгиба при совместном действии изгиба и кручения?
15. Как пишутся условия прочности стержня по всем четырем теориям, если известны σ_H и τ_K ?
16. Как находится величина расчетного момента при изгибе с кручением стержня круглого поперечного сечения?
17. По какой теории прочности (третьей или четвертой) получится большая величина расчетного момента при заданных величинах M_u и M_K ?

Т е м а 9. Устойчивость равновесия деформируемых систем

Предыдущие темы курса касались расчетов на прочность и на жесткость; в этой теме изложен расчет на устойчивость. Опасность явлений потери устойчивости заключается в том, что оно может наступить при напряжении, значительно меньшем предела прочности материала. Это напряжение называется критическим; для стержней большой гибкости его можно определять по формуле Эйлера. Исследования профессора Ф.С.Ясинского дали возможность установить величину критического напряжения для стержней малой и средней гибкости, для которых формулу Эйлера применять нельзя. Допускаемое напряжение при расчете на устойчивость должно быть понижено по сравнению с допускаемым напряжением при обыкновенном сжатии. Величины коэффициентов φ , учитывающих это понижение, для стержней различной гибкости и для различных материалов, приводятся в специальных таблицах. Следует обратить внимание на то, что при подборе сечения приходится несколько раз производить вычисления, применяя способ последовательных приближений.

Литература: / 2, гл. 1,2; 3, гл. 11 /.

Вопросы для самопроверки

1. В чем заключается явление потери устойчивости сжатого стержня?
2. Какая сила называется критической?
3. По какой формуле находится величина критической силы?
4. Как изменяется величина критической силы для стойки круглого сечения при уменьшении диаметра в два раза?
5. Как изменяется величина критической силы для стойки круглого сечения при увеличении длины стойки в два раза ?
6. В каких пределах применима формула Эйлера?
7. Что называется гибкостью стержня?

8. Как учитывается влияние способа закрепления концов стержня?
9. Чему равен коэффициент длины для различных случаев закрепления концов?
10. Как находится критическое напряжение для стержней малой и средней гибкости?
11. Какой вид имеет график критических напряжений?
12. Как производится проверка стержней на устойчивость при помощи коэффициента φ ?
13. Как подбирается сечение стержня при расчете на устойчивость?

Т е м а 10. Расчет на прочность при напряжениях, циклически изменяющихся во времени

Эта тема имеет важное значение, так как в деталях машин часто возникают переменные напряжения. Надо хорошо уяснить понятие предела выносливости и научиться строить диаграммы для несимметричного цикла. Необходимо также знать все факторы, от которых зависит величина коэффициента концентрации напряжений. Особое внимание следует обратить на практические меры по борьбе с изломами усталости: а) повышение предела прочности при достаточной пластичности; б) создание однородной, мелкозернистой структуры; в) проектирование внешних очертаний детали без резких переходов; г) тщательную обработку поверхности.

Надо подробно разобрать примеры определения допускаемых напряжений для различных деталей машин, воспринимающих переменные нагрузки. Правильный выбор допускаемого напряжения и формы сечения обеспечивает более экономное использование материала и снижение веса конструкции.

Литература: / 1, гл. 22; 2, гл. 11 /.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется пределом выносливости?
2. Какая эмпирическая зависимость имеется между пределом выносливости и пределом прочности?
3. Как находится предел выносливости при несимметричном цикле?
4. Какие напряжения называются местными?
5. В чем заключается разница между теоретическими и действительными коэффициентами концентрации напряжений?
6. Как влияет на величину действительного коэффициента концентрации напряжений характер обработки материала?
7. Как влияют размеры детали на величину предела выносливости?
8. Как устанавливаются допускаемые напряжения при переменных напряжениях?
9. Какие практические меры применяются по борьбе с изломами усталости?

Т е м а 11. Динамическая нагрузка

В этой теме рассматриваются два вопроса: 1) напряжение в движущихся деталях; 2) напряжения при ударе. В первом случае динамическое воздействие сводится к дополнительно статической нагрузке соответствующими силами инерции. Во втором – учесть силы инерции учесть невозможно, так как неизвестна продолжительность удара, т.е. величина того промежутка времени, в течение которого происходит падение скорости до нуля. Напряжение при ударе вычисляют, приравнявая кинетическую энергию ударяющегося тела потенциальной энергии деформаций стержня, воспринимающего удар. Весьма существенным является то обстоятельство, что напряжения при ударе зависят не только от площади поперечного сечения стержня, но и от его

длины и модуля упругости материала.

Литература: / 1, гл. 23; 2, гл. 13; 3, гл. 12 /.

Вопросы для самопроверки

1. Как вычисляют напряжения в деталях при равноускоренном поступательном движении?
2. Что называется динамическим коэффициентом?
3. От каких факторов зависят напряжения в ободу вращающегося колеса?
4. Как находят напряжения в спарниках и шатунах?
5. Как находят напряжения во вращающемся диске постоянной толщины?
6. Как делается вывод формулы, служащей для определения напряжений при ударе?
7. Чему равен динамический коэффициент при ударе?
8. Как изменится напряжение при продольном ударе в случае увеличения площади поперечного сечения в два раза? (При ответе на этот вопрос можно пользоваться приближенной формулой).
9. Зависит ли напряжение при изгибающем ударе от материала балки?
10. В каком случае возникнут большие напряжения при изгибающем ударе при положении балки на ребро или плашмя?
11. От каких факторов зависит напряжение при скручивающем ударе?
12. Каким путем можно уменьшить напряжение в стержне с выточками при продольном ударе?
13. Как учитывается масса упругой системы, испытывающей удар?
14. Как производится испытание на удар?

Т е м а 12. Статически неопределимые системы

Расчет статически неопределимых балок был рассмотрен в теме 7; тема 12 посвящена расчету статически неопределенных рам.

Расчет плоских систем подробно изложен в обоих рекомендованных учебниках, расчетно плоско пространственных и пространственных систем рассмотрен только в учебнике В.И.Фсодосьева.

Литература: / 1, гл. 14; 2, гл. 5, 6 /.

Вопросы для самопроверки

1. Какова размерность потенциальной энергии деформации?
2. Можно ли сказать, что потенциальная энергия, вызванная группой сил, равна сумме потенциальных энергий, вызванных каждой из сил в отдельности?
3. Как формулируются теоремы о взаимности работ и о взаимности перемещений?
4. В чем сущность способа Верещагина?
5. Что называется "основной системой"?
6. Что означают величины δ_{11} и Δ_{1p} ?
7. Каков физический смысл произведений $X_1\delta_{11}$ и $X_2\delta_{12}$?
8. Какая мысль выражается при помощи уравнения $X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + \Delta_{1p} = 0$?
9. Каким свойством обладают побочные перемещения?

УКАЗАНИЯ О ПОРЯДКЕ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Каждый студент выполняет то количество контрольных работ, которое предусмотрено учебным графиком. Студенты всех механических

специальностей выполняют две контрольные работы: в первую входят задачи №№ 1, 2, 3, 5, 6; во вторую – №№ 7,8,9,10,11,12.

1. Студент обязан взять из таблицы данные в соответствии со своим личным номером (шифром) и первыми шестью буквами русского алфавита, которые следует расположить под шифром, например,

шифр – 2 7 3 0 5 2;

буквы – а б в г д е.

В случае личного номера, состоящего из семи цифр, вторая цифра шифра не учитывается.

Из каждого вертикального столбца любой таблицы, обозначенного внизу определенной буквой, надо взять только одно число, состоящее в той горизонтальной строке, номер которой совпадает с номером буквы.

Работы, выполненные с нарушением этих указаний, не зачитываются.

2. Не следует приступать к выполнению контрольных заданий, не изучив соответствующего раздела курса и не решив самостоятельно рекомендованных задач. Если основные положения теории усвоены слабо и студент обратил мало внимания на подробно разобранные в курсе примеры, то при выполнении контрольных работ возникнут большие затруднения. Несамостоятельно выполненное задание не дает возможности преподавателю-рецензенту вовремя заметить недостатки в работе студента-заочника. В результате студент не приобретает необходимых знаний и оказывается неподготовленным к экзамену.

3. Это не дает возможности рецензенту и своевременно указать студенту на допущенные ошибки и задерживает рецензирование.

4. В заголовке контрольной работы должны быть четко написаны: номер контрольной работы, название дисциплины, фамилия, имя и отчество студента (полностью), название факультета и специальности, учебный шифр, дата отсылки работы, точный почтовый адрес.

5. Каждую контрольную работу следует выполнять в особой тетради или на листах, сшитых в тетради стандартного формата, чернилами (не красными), четким почерком, с полями в 5 см для замечаний рецензента.

6. Перед решением каждой задачи надо выписать полностью ее условие с числовыми данными, составить аккуратный эскиз в масштабе и указать на нем в числах все величины, необходимые для расчета.

7. Решение должно сопровождаться краткими, последовательными и грамотными, без сокращений слов, объяснениями и чертежами, на которых все входящие в расчет величины должны быть показаны в числах. Надо избегать многословных пояснений и пересказа учебника; студент должен знать, что язык техники – формула и чертеж. При пользовании формулами и данными, отсутствующими в учебнике, необходимо кратко и точно указать источник (автора, название, издание, страницу, номер формулы).

8. Необходимо указывать размерность всех величин и подчеркивать окончательные результаты.

9. Соответствовать необходимой точности. Нет необходимости длину деревянного бруса в стропилах вычислять с точностью до миллиметра, но было бы ошибкой округлять до целых миллиметров диаметра вала, на который будет насажен шариковый подшипник.

10. По получении из института контрольной работы студент должен исправить в ней все отмеченные ошибки и выполнять все сделанные ему указания. В случае требования рецензента следует в кратчайший срок послать ему выполнение на отдельных листах исправления, которые должны быть вложены в соответствующие места рецензированной работы. Отдельно от работы исправления не рассматриваются.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Схемы и таблицы данных каждой задачи представлены в приложении.

Задача № 1

Стальной стержень ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа) находится под действием продольной силы F и собственного веса ($\gamma = 78 \frac{\text{кН}}{\text{м}^3}$).

Построить эпюру продольных сил и найти перемещение сечения 1-1.

Задача № 2

Абсолютно жесткий стержень опирается на шарнирно неподвижную опору и прикреплен к двум стержням при помощи шарниров.

Требуется:

1) найти усилия и напряжения в стержнях, выразив их через силу Q ;

2) найти допускаемую нагрузку $Q_{\text{доп}}$, приравняв большее из напряжений в двух стержнях допускаемому напряжению $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$;

3) найти предельную грузоподъемность системы Q_T и допускаемую нагрузку $Q_{\text{доп}}$, если предел текучести $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$ и запас прочности $n = 1,5$;

4) сравнить величины $Q_{\text{доп}}$, полученные при расчете по допускаемым напряжениям и допускаемым нагрузкам.

Задача № 3

К стальному валу приложены три известных момента: M_1 , M_2 , M_3 .

Требуется:

1) установить, при каком значении момента X угол поворота правого концевого сечения вала равен нулю;

2) для найденного значения X построить эпюру крутящих моментов;

Задача № 5

Для заданных схем балок требуется написать выражения Q и M для каждого участка в общем виде; построить эпюры Q и M и подобрать: а) для схемы (а) деревянную балку круглого поперечного сечения при $[\sigma] = 8 \text{ МПа}$; б) для схемы (б) стальную балку двутаврового поперечного сечения при $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Задача № 6

Для заданной балки найти величину изгибающего момента на левой опоре (в долях $g \cdot l^2$), построить эпюры Q и M , а также построить эпюру прогибов, вычислив три ординаты в пролете и две на консоли.

Задача № 7

Чугунный короткий стержень сжимается продольной силой F , приложенной в точке А.

Требуется:

1) напряжения в поперечном сечении, выразив величины этих напряжений через F и размеры сечения;

2) найти допускаемую нагрузку F при заданных размерах сечения и допускаемых напряжениях для чугуна на сжатие $[\sigma_c]$ и на растяжение $[\sigma_p]$.

Задача № 8

На ломанный стержень круглого поперечного сечения, расположенный в горизонтальной плоскости и имеющий прямые углы в точках А и В, действует вертикальная нагрузка.

Требуется:

- 1) построить отдельно (в аксонометрии) эпюры изгибающих и крутящих моментов;
- 2) установить опасное сечение и найти для него величину расчетного момента по четвертой теории прочности.

Задача № 9

Шкив с диаметром D_1 и с углом наклона ветвей ремня к горизонту α_1 делает n оборотов в минуту и передает мощность кВт. Два других шкива имеют одинаковый диаметр D_2 и одинаковые углы наклона ветвей ремня к горизонту α_2 и каждый из них передает мощность $N/2$.

Требуется:

- 1) определить моменты, приложенные к шкивам, по заданным величинам N и n ;
- 2) построить эпюру крутящих моментов $M_{кр}$;
- 3) определить окружные усилия t_1 и t_2 , действующие на шкивы, по найденным моментам и заданным диаметрам шкивов D_1 и D_2 ;

4) определить давления на вал, принимая их равными трем окружным усилиям;

5) определить силы, изгибающие вал в горизонтальной и вертикальной плоскостях (вес шкивов и вала не учитывать);

6) построить эпюры изгибающих моментов от горизонтальных сил $M_{гор}$ и от вертикальных сил $M_{верт}$;

7) построить эпюру суммарных изгибающих моментов, пользуясь формулой $M_{изг} = \sqrt{M_{гор}^2 + M_{верт}^2}$ (для каждого поперечного сечения вала имеется своя плоскость действия суммарного изгибающего момента, но для круглого сечения можно совместить плоскости $M_{изг}$ для всех поперечных сечений и построить суммарную эпюру в плоскости чертежа; при построении эпюры надо учесть, что для некоторых участков вала она не будет прямолинейной);

8) при помощи эпюр $M_{кр}$ (см. п. 2) и $M_{изг}$ (см. п. 7) найти опасное сечение и определить величину максимального расчетного момента (по третьей теории прочности);

9) подобрать диаметр вала d при $[\sigma] = 70 \text{ МПа}$ и округлить его величину.

Задача №10

Стальной стержень длиной l сжимается силой F .

Требуется:

- 1) найти размеры поперечного сечения при допуске напряжении на простое сжатие $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ (расчет производить последовательными приближениями, предварительно задавшись величиной коэффициента $\varphi = 0,5$);
- 2) найти величину критической силы и коэффициент запаса устойчивости.

Задача № 11

Плоская рама в своей плоскости нагружена внешней нагрузкой, при этом вертикальные элементы имеют моменты инерции I , а горизонтальные - $K \cdot I$.

Требуется:

- 1) установить степень статической неопределимости и выбрать основную систему;
- 2) написать канонические уравнения;
- 3) построить эпюры M от единичных сил и от заданной нагрузки;
- 4) найти перемещения;
- 5) найти величины лишних неизвестных;
- 6) построить окончательные эпюры внутренних силовых факторов: M , N и Q .

Задача № 12

На двутавровую балку, свободно лежащую на двух жестких опорах с высоты h падает груз F .

Требуется:

- 1) найти наибольшее нормальное напряжение в балке;
- 2) решить аналогичную задачу при условии, что правая опора заменена пружиной, податливость которой (т.е. осадка от груза весом 10 кН) равна α ;
- 3) сравнить полученные результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сопротивление материалов / Г.С.Писаренко, В.А.Агарев, А.Л.Квитка, В.Г.Попков, Э.С.Уманский; под ред. Г.С.Писаренко. – К.: Вища шк., 1986. – 775 с.
2. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – 9-е изд., перераб. – М.: Наука, 1986. – 512 с.
3. Цурпал И.А. Краткий курс сопротивления материалов: Учебн. пособие. – К.: Вища шк., 1989. – 311 с.
4. Колесник І.А., Гомон В.В., Яровий В.Є. та ін. Методичні вказівки до виконання розрахунково-проектувальних робіт з дисципліни “Опір матеріалів” для студентів спеціальностей 7.090407, 7.090218. – Дніпропетровськ: ДМетАУ, 1998. – 51 с.
5. Колесник І.А., Гомон В.В., Яровий В.Є. та ін. Методичні вказівки до виконання розрахунково-проектувальних робіт з дисципліни “Опір матеріалів” для студентів усіх спеціальностей. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2002. – 43 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Схемы к задаче В I

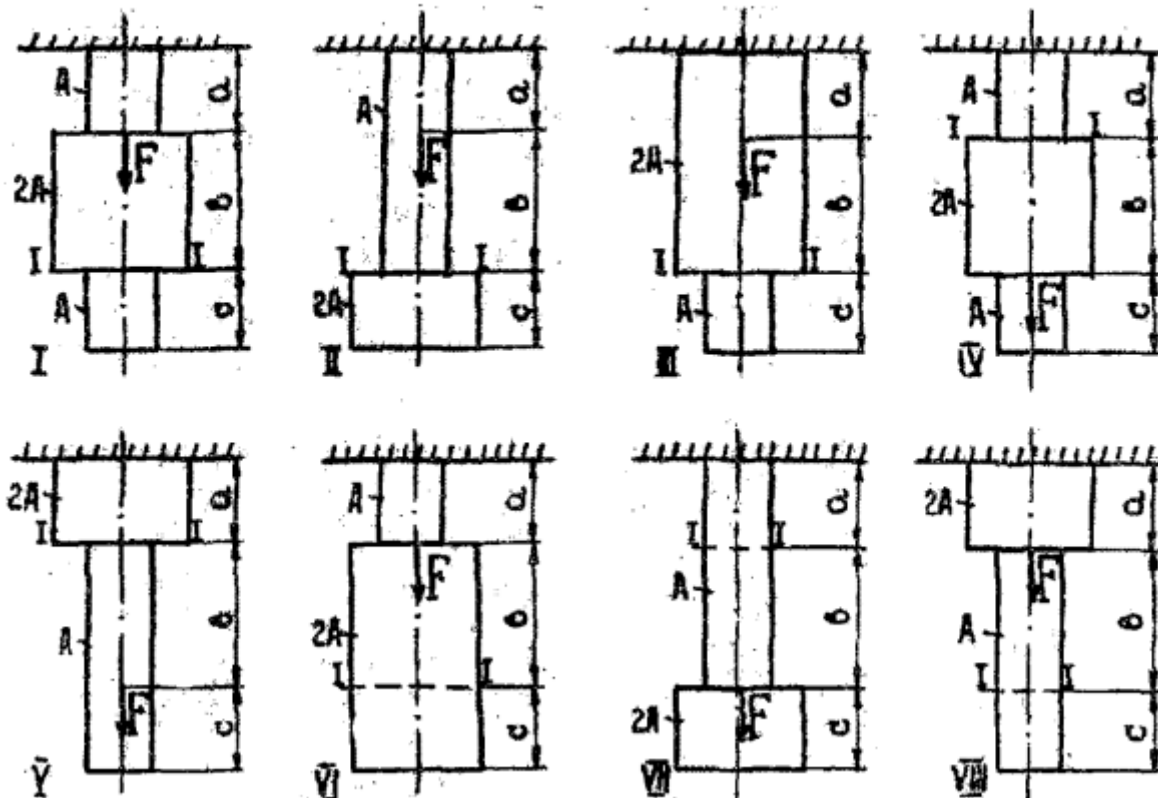
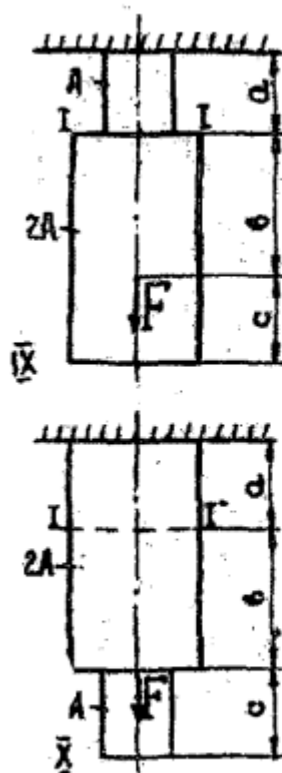


Таблица к задаче В I



№ стро- ки	Схема	A, см ²	а	б	с	F, кН
			м			
1	I	10	2,1	3,0	1,0	20
2	II	12	2,2	2,9	1,2	22
3	III	44	2,3	2,8	1,4	24
4	IV	46	2,4	2,7	1,6	26
5	V	48	2,5	2,6	1,8	28
6	VI	20	2,6	2,5	2,0	30
7	VII	22	2,7	2,4	2,2	32
8	VIII	24	2,8	2,3	2,4	34
9	IX	26	2,9	2,2	2,6	36
0	X	28	3,0	2,1	2,8	38
	с	д	е	д	з	е

Схемы к задаче 5.2

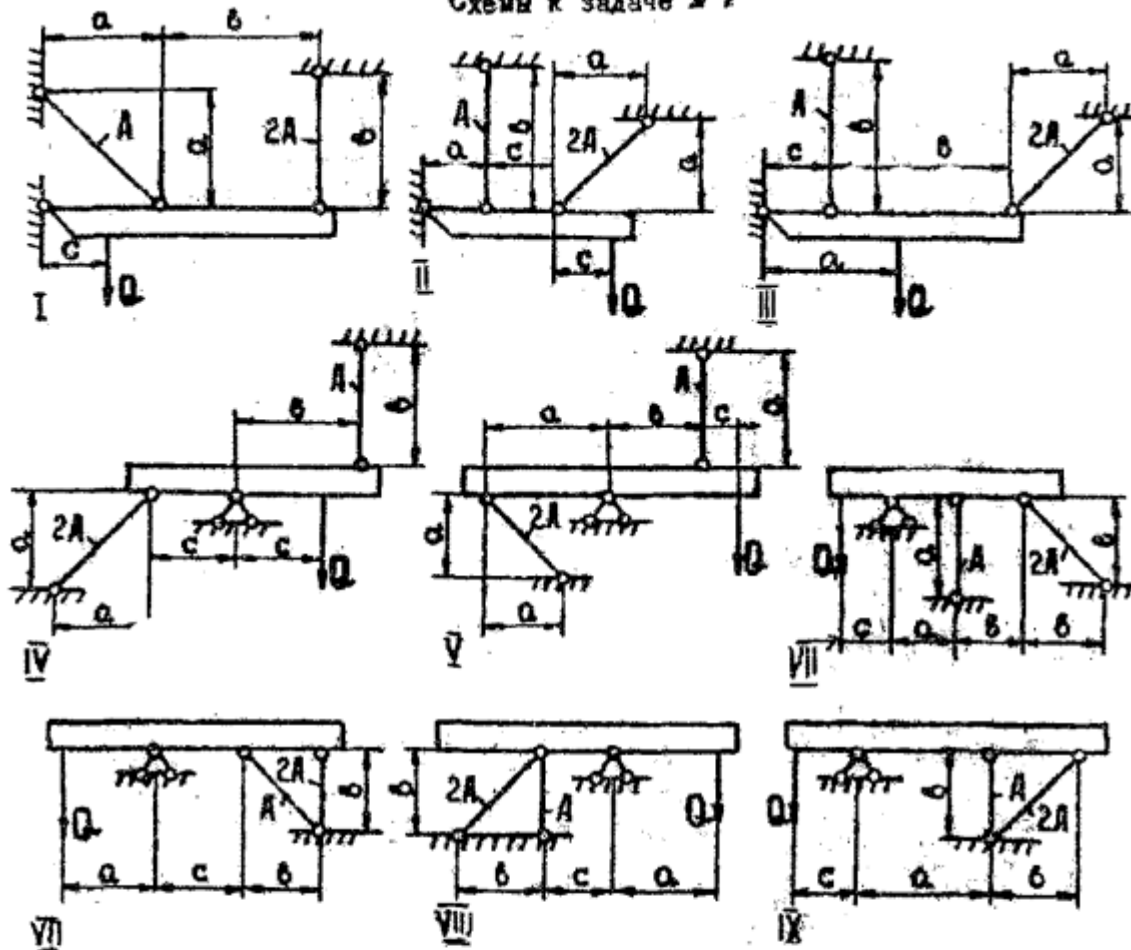
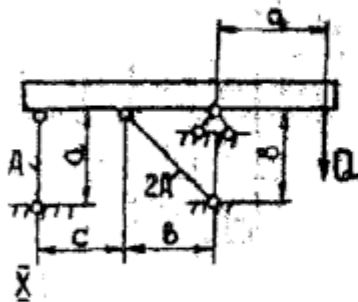


Таблица к задаче 5.2

№ стого ля	Схема	A, см ²	a	b	c
			м		
1	I	11	1,2	3,8	2,0
2	II	13	1,4	3,6	2,2
3	III	15	1,6	3,4	2,4
4	IV	17	1,8	3,2	2,6
5	V	19	2,0	3,0	2,8
6	VI	21	2,2	2,8	3,0
7	VII	23	2,4	2,6	3,2
8	VIII	25	2,6	2,4	3,4
9	IX	27	2,8	2,2	3,6
0	X	29	3,0	2,0	3,8
	e	9	e	9	e



Схемы к задаче Б 3

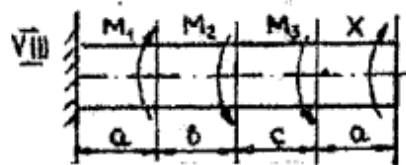
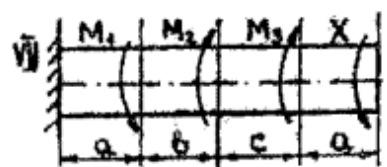
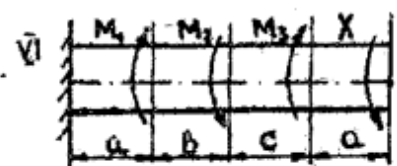
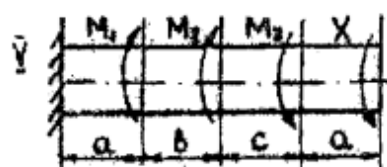
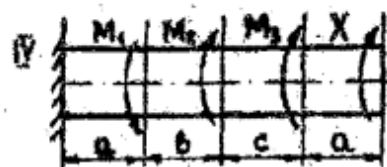
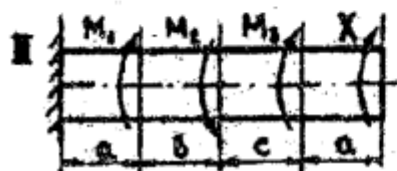
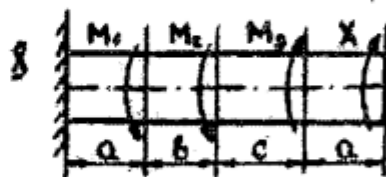
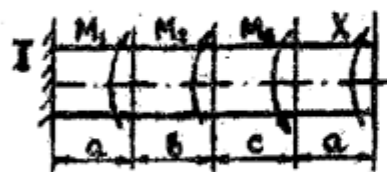
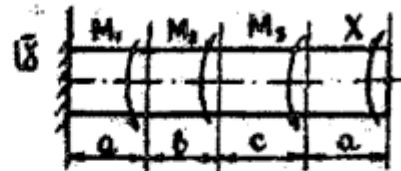
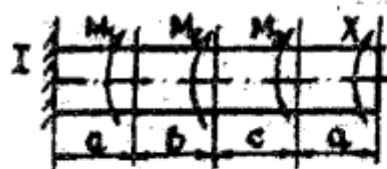
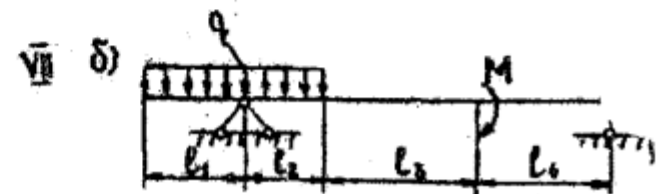
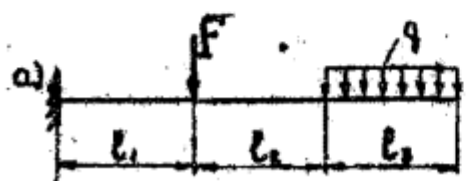
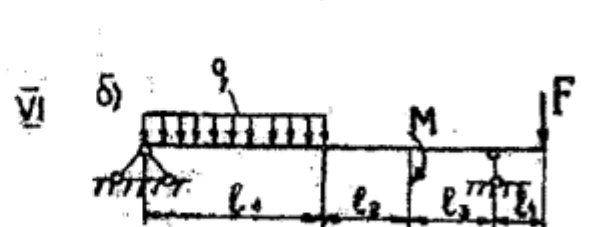
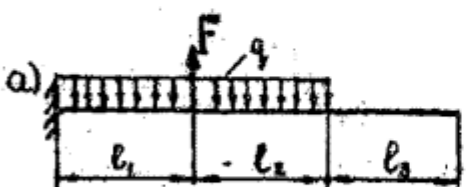
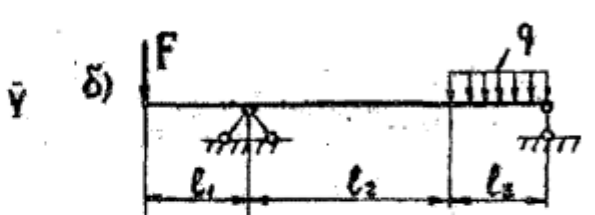
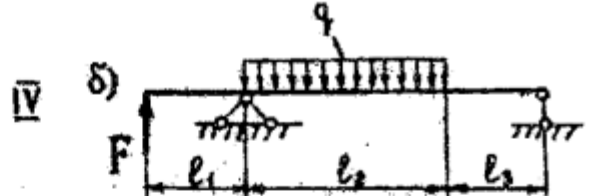
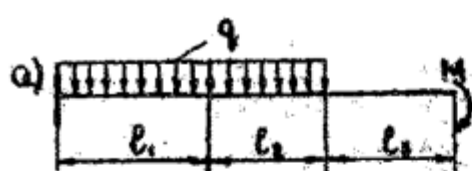
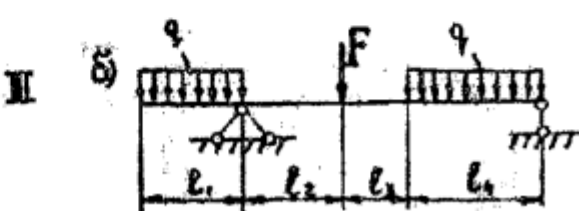
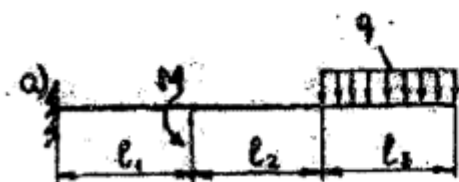
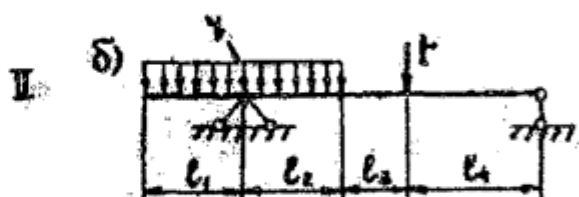
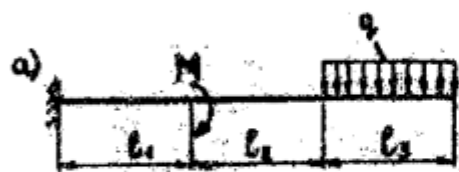
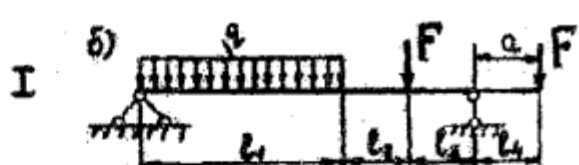


Таблица к задаче Б 3

№ стро- ки	Схема	Расстояние, м			Момент, кН·м			[τ], МПа
		a	b	c	M ₁	M ₂	M ₃	
1	I	1.1	1.1	1.1	11	11	11	35
2	II	1.2	1.2	1.2	12	12	12	40
3	III	1.3	1.3	1.3	13	13	13	45
4	IV	1.4	1.4	1.4	14	14	14	50
5	V	1.5	1.5	1.5	15	15	15	55
6	VI	1.6	1.6	1.6	16	16	16	60
7	VII	1.7	1.7	1.7	17	17	17	65
8	VIII	1.8	1.8	1.8	18	18	18	70
9	IX	1.9	1.9	1.9	19	19	19	75
0	X	2.0	2.0	2.0	20	20	20	80
	e	2	д	e	2	д	e	в



Схемы к задаче № 5

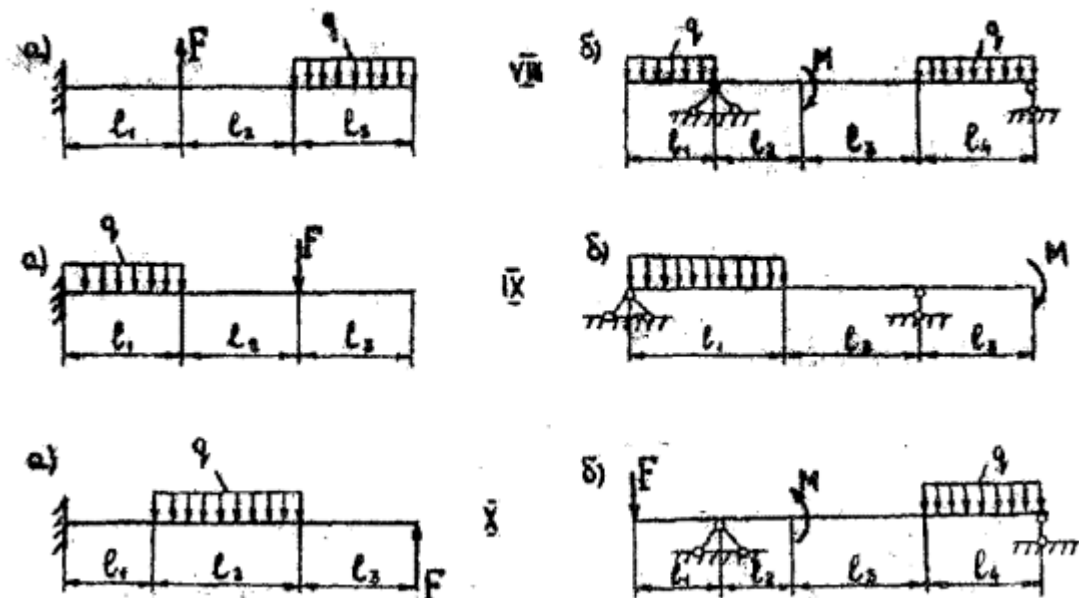


Таблица к задаче № 5

№ стро- ки	Схе- ма	Расстояние, м				M, кН·м	F, кН	q, кН/м
		l_1	l_2	l_3	l_4			
1	I	1,1	2,0	0,5	1,4	10	15	10
2	II	1,2	1,9	0,6	1,5	20	25	12
3	III	1,3	1,8	0,7	1,6	30	35	14
4	IV	1,4	1,7	0,8	1,7	40	45	16
5	V	1,5	1,6	0,9	1,8	50	55	18
6	VI	1,6	1,5	1,0	1,9	60	65	20
7	VII	1,7	1,4	1,1	2,0	70	75	22
8	VIII	1,8	1,3	1,2	2,1	80	70	24
9	IX	1,9	1,2	1,3	2,2	90	60	26
0	X	2,0	1,1	1,4	2,3	100	50	28
	е д е г е г д е							

Схемы к задаче В 6

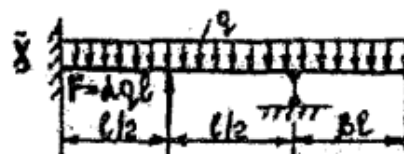
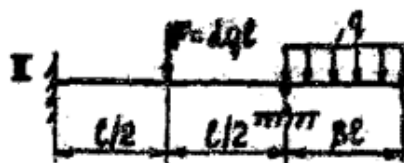
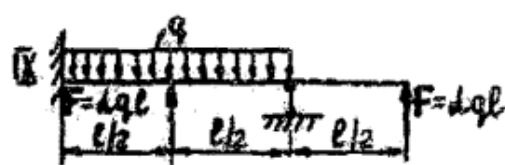
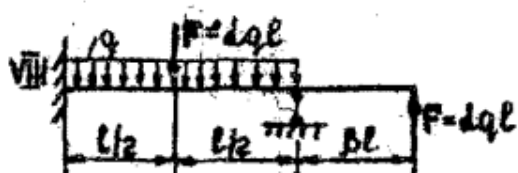
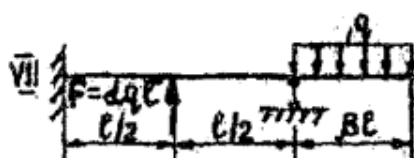
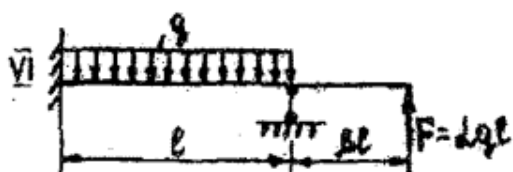
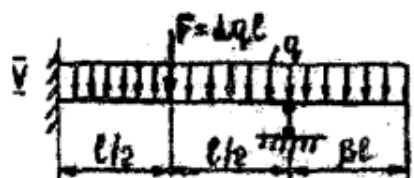


Таблица к задаче В 6

№ стро- ки	Схема	А	В	В
1	I	0.1	0.1	1.5
2	II	0.2	0.2	2
3	III	0.3	0.3	3
4	IV	0.4	0.4	4
5	V	0.5	0.5	5
6	VI	0.6	0.6	6
7	VII	0.7	0.7	7
8	VIII	0.8	0.8	8
9	IX	0.9	0.9	9
0	X	1.0	1.0	10
	e	2	д	e



Схемы к задаче № 7

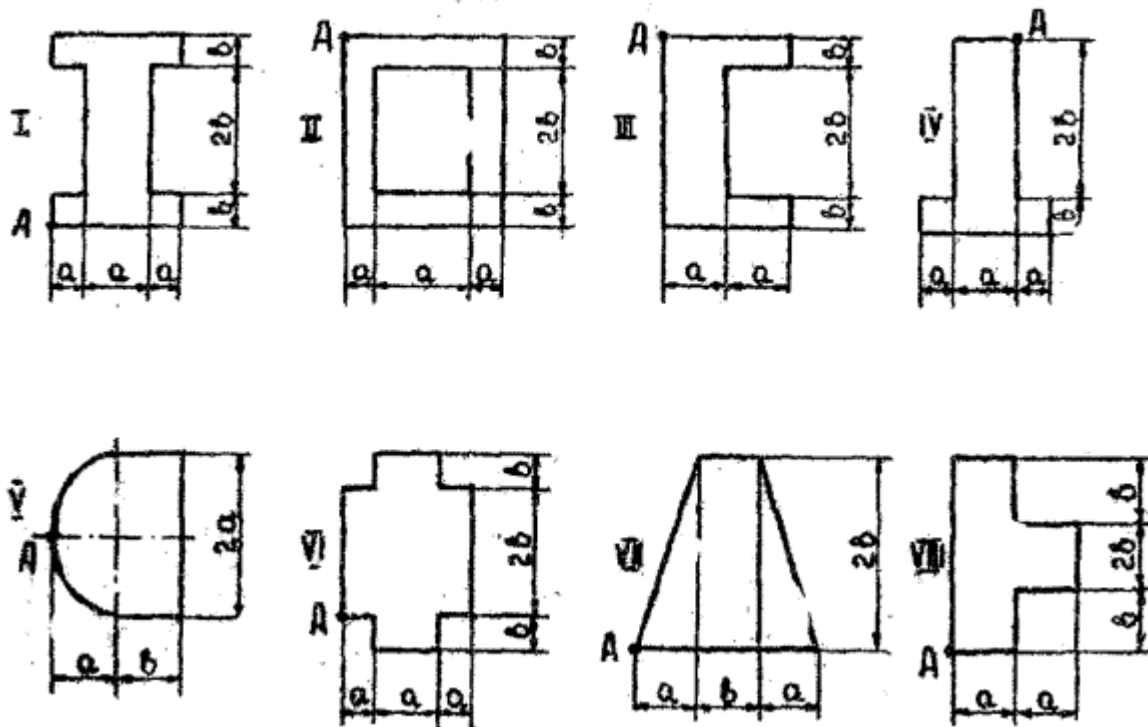
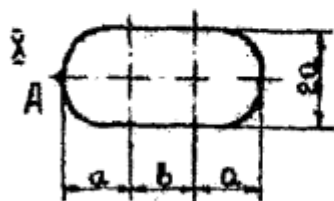
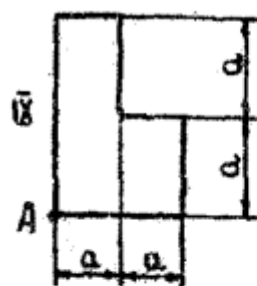


Таблица к задаче № 7



№ стро- ки	Схема	a	b	$[σ_c]$	$[τ_p]$
		см		МПа	
1	I	6	6	110	21
2	II	2	2	120	22
3	III	3	3	130	23
4	IV	4	4	140	24
5	V	5	5	150	25
6	VI	6	6	60	26
7	VII	2	2	70	27
8	VIII	3	3	80	28
9	IX	4	4	90	29
0	X	5	5	100	30
	e	2	4	2	4

Схемы к задаче 8

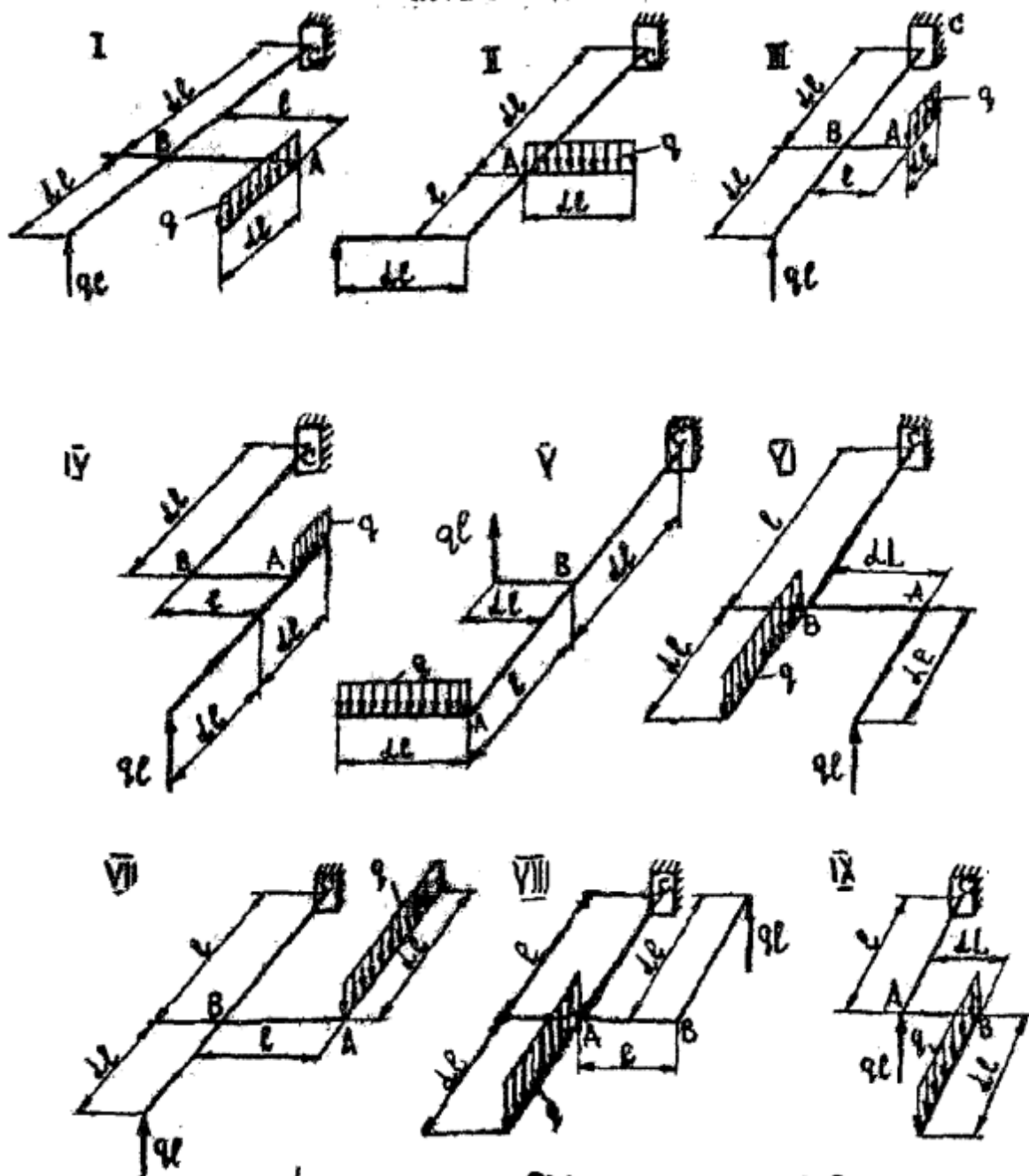


Таблица к задаче 8

№ стро- ки	Схема	l	№ стро- ки	Схема	l
1	I	1.1	6	VI	0.6
2	II	1.2	7	VII	0.7
3	III	1.3	8	VIII	0.8
4	IV	1.4	9	IX	0.9
5	V	1.5	10	X	1.0
	д	е		д	е

Схемы к задаче № 9

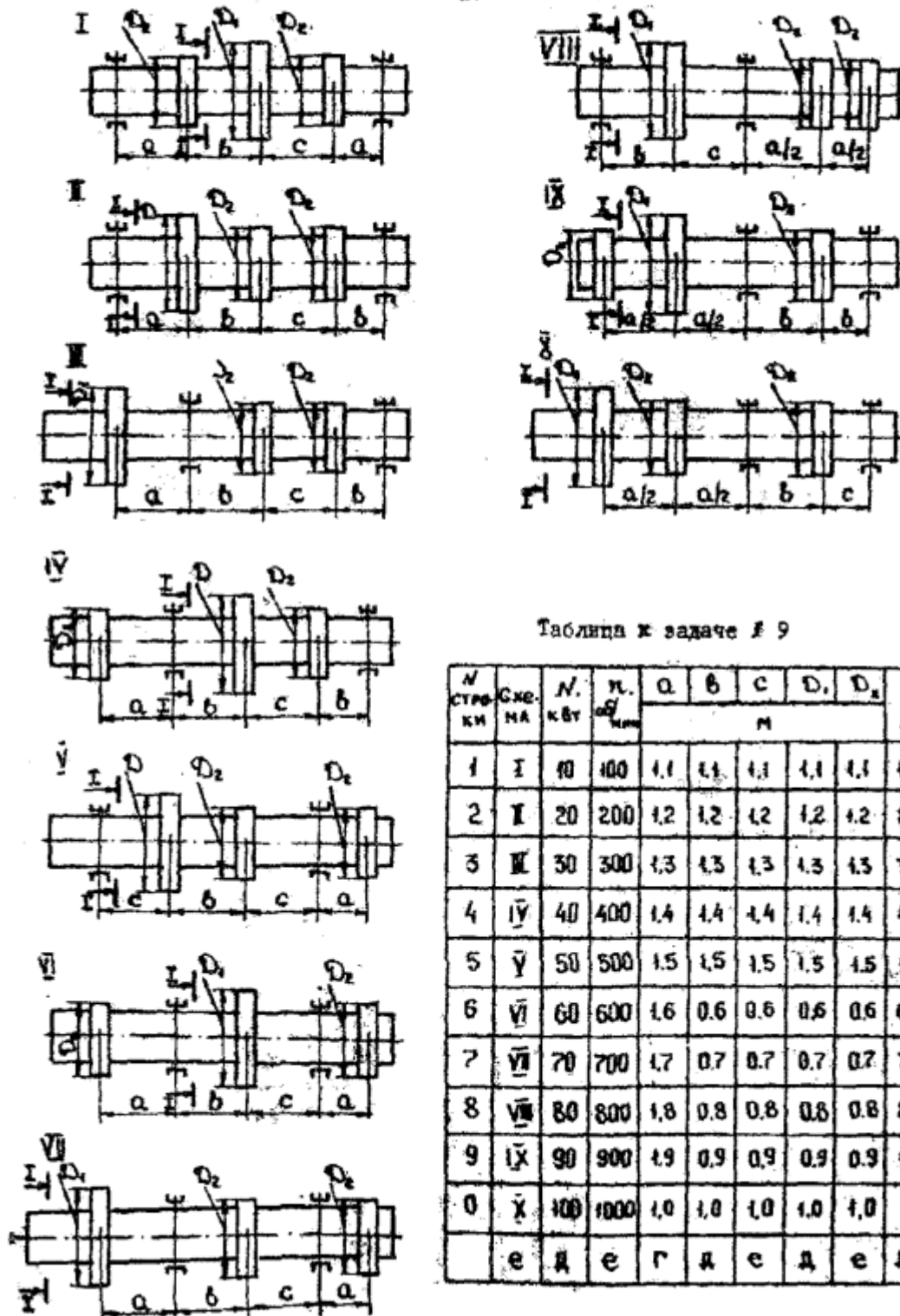
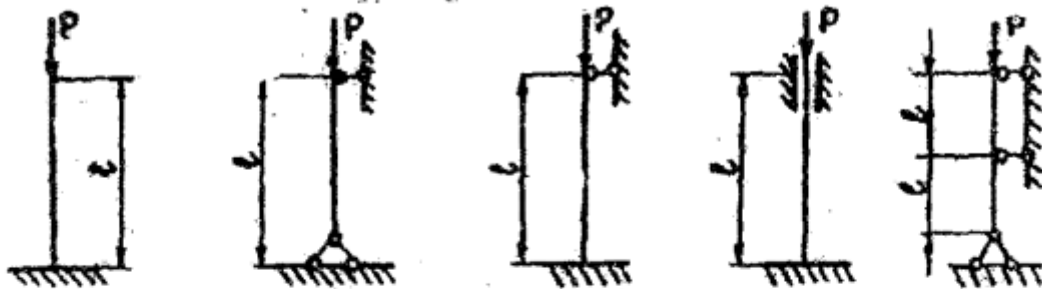


Схема закрепления концов стержня



Форма сечения стержня

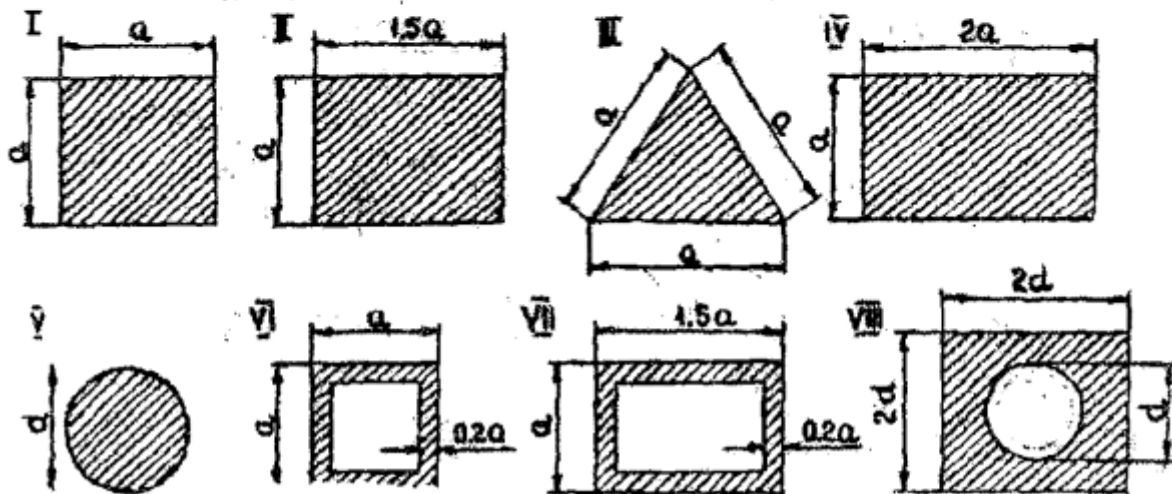


Таблица к задаче 8-10

№ строки	Вариант схемы	P, кН	l, м
1	I	10	2,1
2	II	20	2,2
3	III	30	2,3
4	IV	40	2,4
5	V	50	2,5
6	VI	60	2,6
7	VII	70	2,7
8	VIII	80	2,8
9	IX	90	2,9
10	X	100	3,0
	е	г	д

Схемы к задаче 1 II

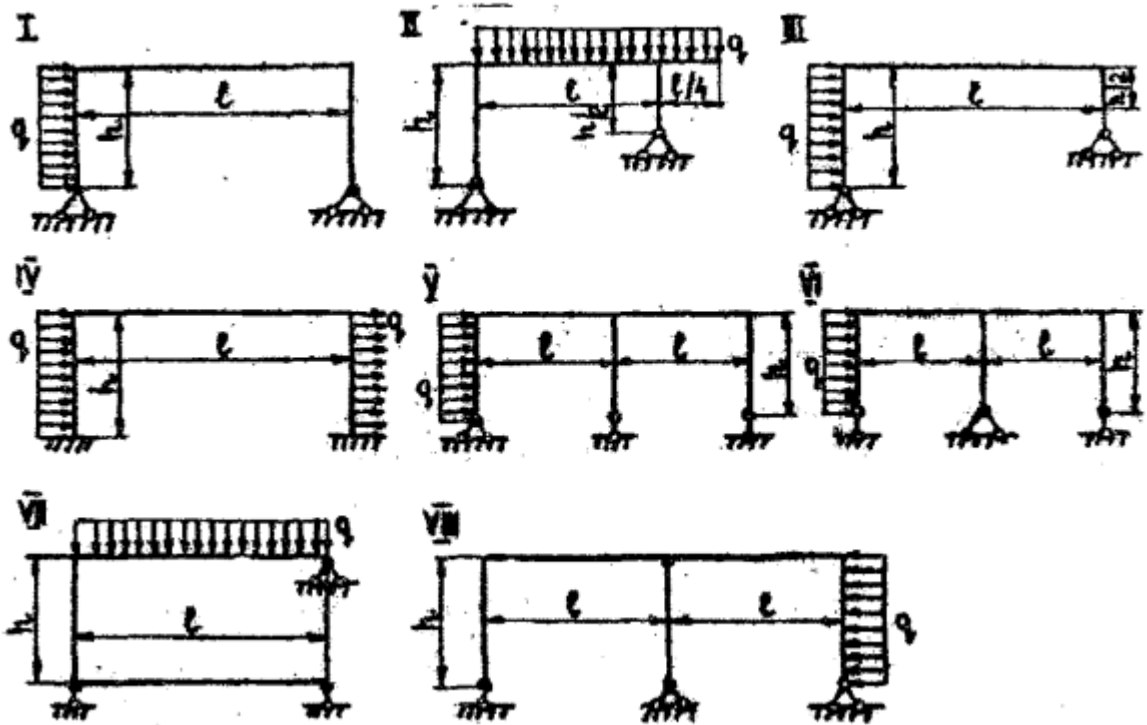
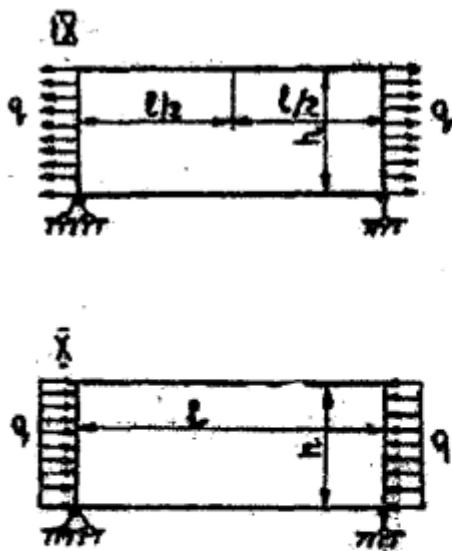


Таблица к задаче 1 II



N СТРО- КИ	СХЕМА	l	h	q, КН/М	R
		M			
1	I	11	2	15	1.1
2	II	12	3	20	1.2
3	III	3	4	30	1.3
4	IV	4	5	4	1.4
5	V	5	6	5	1.5
6	VI	6	2	6	1.6
7	VII	7	3	7	1.7
8	VIII	8	4	8	1.8
9	IX	9	5	9	1.9
0	X	10	6	10	2.0
	e	2	A	e	8

Схемы к задаче № 12

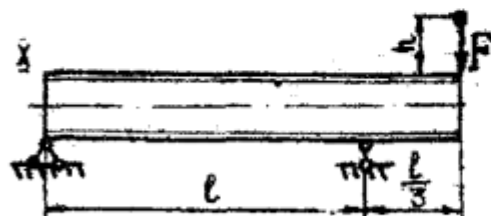
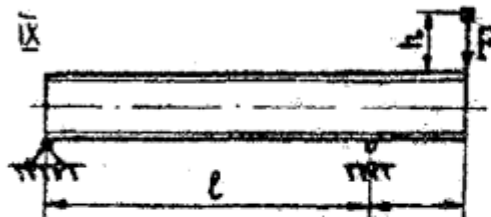
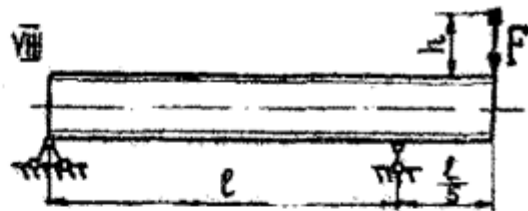
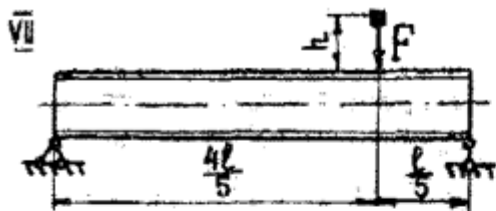
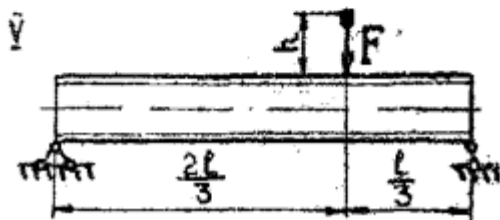
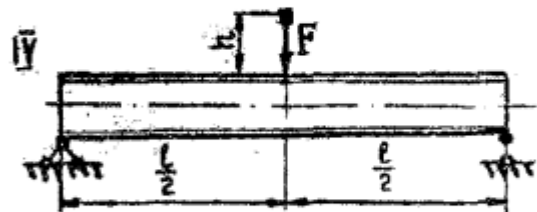
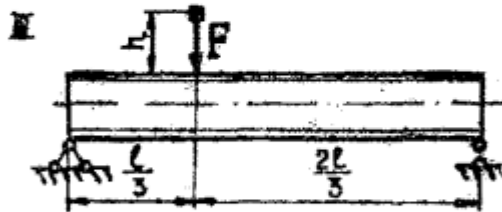
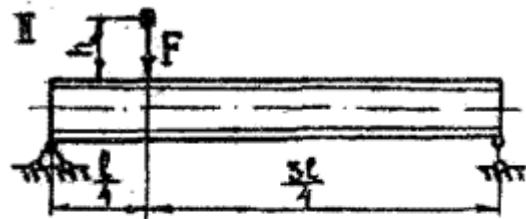


Таблица к задаче № 12

№ стро- ки	Схема	№ раз- став- ки	l , м	F , кН	h , см	d , см/кН
1	I	20	2,1	14	11	21
2	II	20a	2,2	12	12	22
3	III	24	2,3	30	3	23
4	IV	24a	2,4	40	4	24
5	V	27	2,5	50	5	25
6	VI	27a	2,6	60	6	26
7	VII	30	2,7	70	7	27
8	VIII	30a	2,8	80	8	28
9	IX	33	2,9	90	9	29
0	X	36	3,0	10	10	30
	e	d	e	г	d	e

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНЫХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ» ДЛЯ СТУДЕНТОВ МЕХАНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ (часть 1)

Задача 1

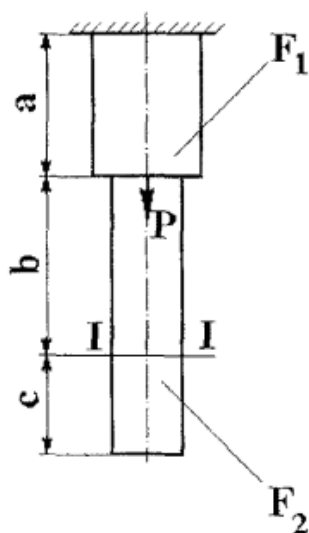
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ СТУПЕНЧАТОГО СТЕРЖНЯ

Перемещение произвольного сечения стержня равно изменению длины участка (Δl), заключенного между этим сечением и закрепленным концом стержня. Для ступенчатых стержней полное изменение длины бруса определяется как алгебраическая сумма деформаций его отдельных частей, в пределах которых постоянны продольная сила N , площадь поперечного сечения F и модуль Юнга E .

Для определения продольного усилия N используется метод сечений: стержень мысленно разрезается на две части, одна из которых отбрасывается; влияние отброшенной части на оставшуюся заменяется неизвестным продольным усилием, которое определяется из уравнения равновесия оставшейся части стержня.

Пример

Стальной стержень ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа) находится под действием силы $P = 3000$ Н и собственного веса ($\gamma = 78$ кН/м³). Найти перемещение сечения I-I (рис. 1), если $F_1 = 20$ см², $F_2 = 10$ см², $a = 1$ м, $b = 2$ м, $c = 1$ м.



Решение

На основании принципа независимости действия сил полное перемещение сечения I-I относительно заделки равно сумме перемещений от действия внешней силы P и от действия собственных весов всех участков стержня.

$$\delta^I = \delta_P + \sum_{i=1}^n \delta_{G_i}.$$

Предварительно определим собственные веса всех трех участков стержня c , b и a .

Рис. 1. Расчетная схема

$$G_c = \gamma F_2 c = 78 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 1 = 0,78 \text{ кН} = 78 \text{ Н},$$

$$G_b = \gamma F_2 b = 78 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 2 = 0,156 \text{ кН} = 156 \text{ Н},$$

$$G_a = \gamma F_1 a = 78 \cdot 20 \cdot 10^{-4} \cdot 1 = 0,156 \text{ кН} = 156 \text{ Н}.$$

Перемещение δ_p^I от действия силы P равно удлинению участков, расположенных выше сечения I-I. Согласно рис.2а сила P вызывает удлинение только участка длиной a , так как на участке b продольная сила равна нулю. Тогда на основании закона Гука $\left(\Delta l = \frac{Nl}{EF} \right)$ имеем

$$\delta_p^I = \Delta l_p = \frac{Pa}{EF_1}.$$

Определим перемещение сечения I-I, равное сумме удлинений участков стержня a и b , вызванное действием последовательно приложенных сил G_c, G_b , и G_a соответственно (рис.2б, в, г).

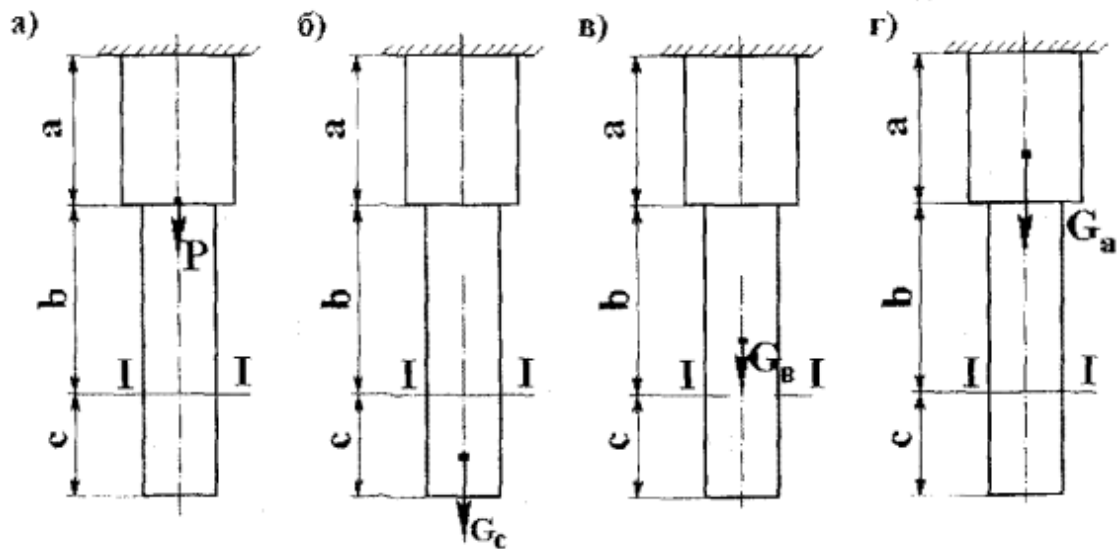


Рис.2. Последовательное приложение нагрузок:

$$\delta_{G_c}^I = \sum \Delta l_{G_c} = \frac{G_c b}{EF_2} + \frac{G_c a}{EF_1},$$

$$\delta_{G_b}^I = \sum \Delta l_{G_b} = \frac{G_b b/2}{EF_2} + \frac{G_b a}{EF_1},$$

$$\delta_{G_a}^I = \Delta l_{G_a} = \frac{G_a a/2}{EF_1}$$

Таким образом, полное искомое перемещение сечения I-I равно

$$\begin{aligned}\delta^I &= \Delta l_p + \sum \Delta l_{G_e} + \sum \Delta l_{G_b} + \Delta l_{G_a} = \\ &= \frac{Pa}{EF_1} + \frac{G_e b}{EF_2} + \frac{G_e a}{EF_1} + \frac{G_b b/2}{EF_2} + \frac{G_b a}{EF_1} + \frac{G_a a/2}{EF_1} = \\ &= \frac{3000 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 20 \cdot 10^{-4}} + \frac{78 \cdot 2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} + \frac{78 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 20 \cdot 10^{-4}} + \\ &+ \frac{156 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} + \frac{156 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 20 \cdot 10^{-4}} + \frac{156 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = \\ &= 0,75 \cdot 10^{-5} + 0,078 \cdot 10^{-5} + 0,0195 \cdot 10^{-5} + 0,078 \cdot 10^{-5} + \\ &+ 0,039 \cdot 10^{-5} + 0,0195 \cdot 10^{-5} = 0,984 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,984 \cdot 10^{-3} \text{ см},\end{aligned}$$

т.е. сечение I-I опустится на 0,00984 мм.

Задача 2

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Абсолютно жесткий брус опирается на шарнирно неподвижную опору и прикреплен к двум стержням при помощи шарниров (рис.3). При $a=2 \text{ м}$, $b=3 \text{ м}$, $c=2 \text{ м}$, $F=12 \text{ см}^2$ требуется:

- 1) найти усилия и напряжения в стержнях, выразив их через силу Q ;
- 2) найти допускаемую нагрузку $Q_{\text{доп}}$, приравняв большее из напряжений в двух стержнях допускаемому напряжению $[\sigma]=160 \text{ МПа}$;
- 3) найти предельную грузоподъемность системы Q_{τ}^* и допускаемую нагрузку $Q_{\text{доп}}^*$, если предел текучести $\sigma_{\tau}=240 \text{ МПа}$ и запас прочности $k=1,5$;
- 4) сравнить величины $Q_{\text{доп}}$, полученные при расчете, по допускаемым напряжениям и допускаемым нагрузкам.

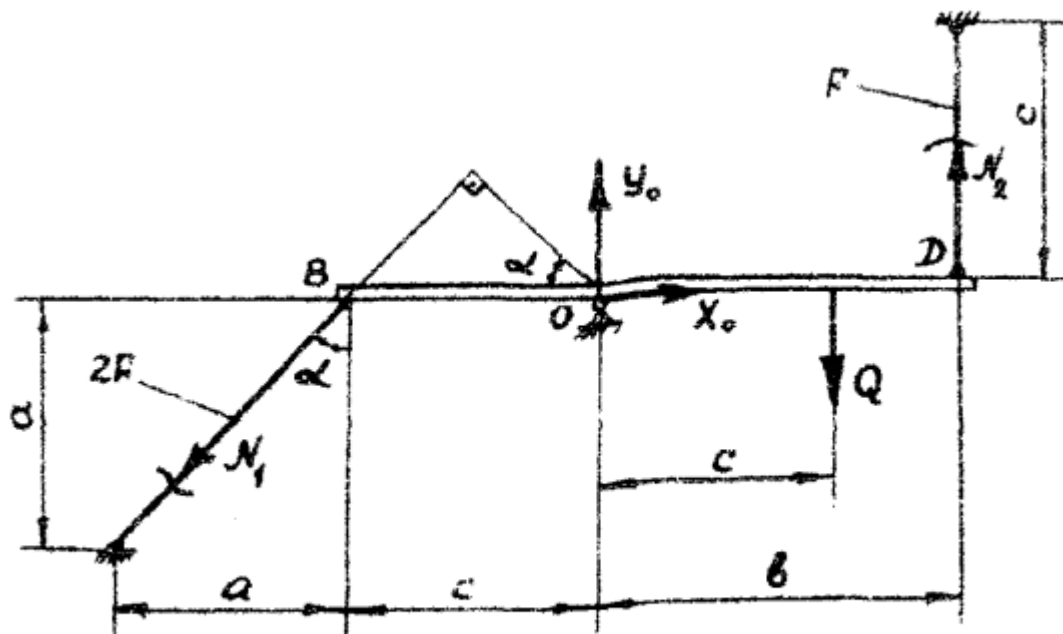


Рис.3. Расчетная схема

Решение

1. Заданная стержневая система имеет четыре неизвестных — продольные усилия в стержнях N_1 и N_2 и опорные реакции X_0 , Y_0 (см. рис.3), а уравнений равновесия можно записать лишь три. Следовательно, задача один раз статически неопределимая, т.е. для ее решения, кроме уравнений статики, нужно составить одно дополнительное уравнение, называемое уравнением совместности деформаций.

Применяя метод сечений, выявляем неизвестные продольные усилия в стержнях N_1 и N_2 и направляем их в соответствии с производимой деформацией. Для определения неизвестных N_1 и N_2 используем только одно уравнение статики — $\sum M_0 = 0$ (в него не войдут опорные реакции X_0 и Y_0):

$$\sum M_0 = N_1 c \cos \alpha - Qc + N_2 b = 0, \quad (1)$$

$$\sqrt{2}N_1 + 3N_2 = 2Q. \quad (2)$$

Составим уравнение совместности деформаций, рассматривая перемещения системы (рис.4).

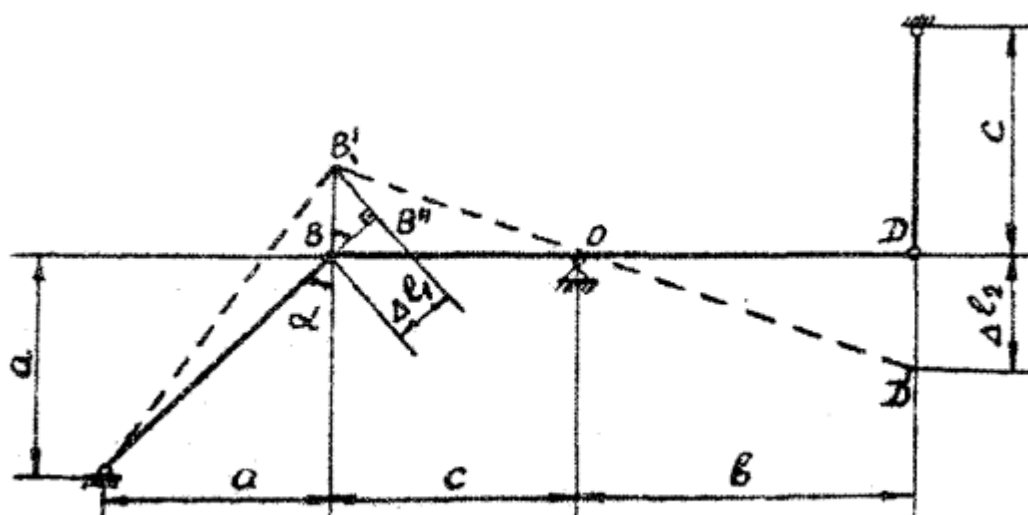


Рис.4. Диаграмма перемещений

Из подобия $\triangle OBB'$ и $\triangle ODD'$ находим

$$\frac{OB}{OD} = \frac{BB'}{DD'},$$

где $DD' = \Delta l_2$, из $\triangle BB'B''$: $BB' = \Delta l_1 / \cos \alpha$.

Таким образом, уравнение совместности деформаций имеет вид

$$\frac{c}{b} = \frac{\Delta l_1}{\cos \alpha \cdot \Delta l_2}. \quad (3)$$

Используя закон Гука, выразим деформации через неизвестные усилия в стержнях:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E \cdot 2F}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF}.$$

Тогда уравнение (3) примет вид:

$$\frac{c}{b} = \frac{N_1 a \cos \alpha \cdot EF}{E \cdot 2F N_2 c \cos \alpha},$$

$$\text{или } \frac{2}{3} = \frac{N_1}{2N_2}, \text{ откуда } N_2 = 0,75 N_1. \quad (4)$$

Решая систему уравнений (2) и (4), находим:

$$N_1 = 0,55 Q,$$

$$N_2 = 0,41 Q.$$

Напряжения в стержнях определяются из уравнения $\sigma = \frac{N}{F}$:

$$\sigma_{(1)} = \frac{N_1}{2F} = \frac{0,55Q}{2 \cdot 12 \cdot 10^{-4}} = 229Q \text{ Па},$$

$$\sigma_{(2)} = \frac{N_2}{F} = \frac{0,41Q}{12 \cdot 10^{-4}} = 341Q \text{ Па}.$$

2. Наиболее напряженным (опасным) будет второй стержень. Определим $Q_{\text{доп}}$ из условия прочности $\sigma_{(2)} \leq [\sigma]$, где $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

$$\sigma_{(2)} = 341Q \leq [\sigma], \text{ откуда}$$

$$Q_{\text{доп}} = \frac{[\sigma]}{341} = \frac{160 \cdot 10^6}{341} = 0,47 \cdot 10^6 \text{ Н} = 470 \text{ кН}.$$

3. Определяем предельную грузоподъемность системы Q_r^* при условии, что напряжения в обоих стержнях достигнут предела текучести. При этом условии усилия в стержнях будут равны:

$$N_1 = \sigma_r \cdot 2F, \quad N_2 = \sigma_r \cdot F.$$

Подставим их в уравнение равновесия (1), полагая $Q = Q_r^*$, откуда находим:

$$\begin{aligned} N_1 c \cos \alpha + N_2 b &= Q_r^* c, \\ Q_r^* &= \frac{N_1 c \cos \alpha + N_2 b}{c} = \frac{\sigma_r F}{c} (2c \cos \alpha + b) = \\ &= \frac{240 \cdot 10^6 \cdot 12 \cdot 10^{-4}}{2} (2 \cdot 2 \cdot 0,707 + 3) = 0,838 \cdot 10^6 \text{ Н} = 838 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Величина допускаемой нагрузки в этом случае будет равна

$$Q_{\text{доп}}^* = \frac{Q_r^*}{k} = \frac{838}{1,5} = 558 \text{ кН}.$$

4. Сравнение результатов, полученных при расчетах по допускаемым напряжениям $Q_{\text{доп}} = 470 \text{ кН}$ и по допускаемым нагрузкам $Q_{\text{доп}}^* = 558 \text{ кН}$, показывает, что расчет статически неопределимой системы по допускаемым нагрузкам позволяет увеличить активную нагрузку на $\approx 16\%$.

Задача 3 РАСЧЕТ ВАЛА НА КРУЧЕНИЕ

К стальному валу приложены три известных момента: $M_1 = 1200 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $M_2 = 1400 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $M_3 = 1600 \text{ Н} \cdot \text{м}$ (рис.6а). При $[\tau] = 60 \text{ МПа}$, $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, $a = 1 \text{ м}$, $b = 1,2 \text{ м}$, $c = 2 \text{ м}$, $d = 1,2 \text{ м}$ требуется:

- 1) установить, при каком значении момента X угол поворота правого концевое сечения вала равен нулю;
- 2) для найденного значения X построить эпюру крутящих моментов;
- 3) при заданном значении $[\tau] = 60 \text{ МПа}$ определить диаметр вала из расчета на прочность;
- 4) построить эпюру углов закручивания;
- 5) найти наибольший относительный угол закручивания на 1 погонный метр.

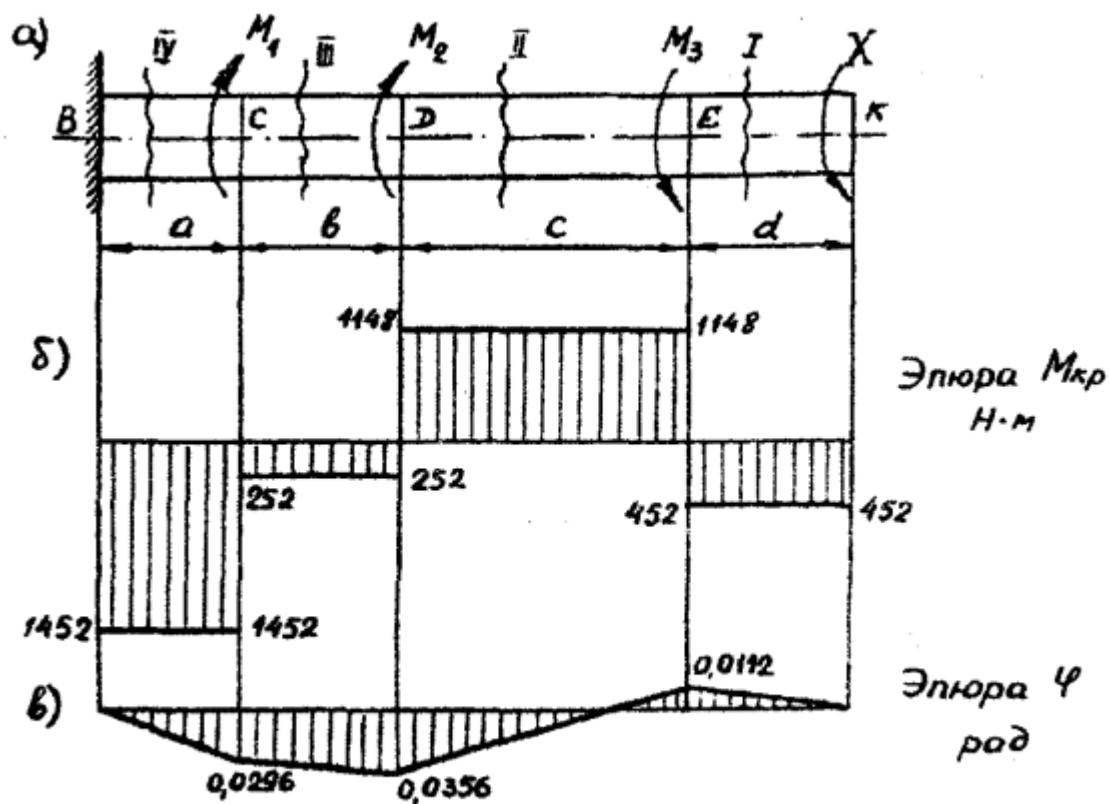


Рис.6. Расчетная схема вала, эпюры $M_{кр}$ и φ

Решение

1. Для определения неизвестного момента X воспользуемся условием, что угол поворота правого концевого сечения, т.е. полный угол закручивания вала φ равен нулю

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{GJ_{\rho}}.$$

Используя принцип независимости действия сил, при заданном направлении момента X (рис. 6а) имеем

$$\frac{X(d+c+b+a)}{GJ_{\rho}} + \frac{M_3(c+b+a)}{GJ_{\rho}} - \frac{M_2(b+a)}{GJ_{\rho}} - \frac{M_1 a}{GJ_{\rho}} = 0.$$

Подставляя известные моменты и сокращая на жесткость GJ_{ρ} , получаем окончательно

$$X = -452 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Знак “-” указывает, что в действительности момент X направлен в противоположную сторону.

2. Определяем крутящие моменты на каждом участке отдельно, используя метод сечений. Крутящий момент в произвольном сечении определяется как алгебраическая сумма скручивающих моментов, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения (рис.6а):

$$M_{кр1} = X = -452 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$M_{кр2} = X + M_3 = -452 + 1600 = 1148 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$M_{кр3} = X + M_3 - M_2 = -452 + 1600 - 1400 = -252 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$M_{кр4} = X + M_3 - M_2 - M_1 = -452 + 1600 - 1400 - 1200 = -1452 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Эпюра крутящих моментов представлена на рис.6б.

3. Диаметр вала определяем из условия прочности

$$\tau_{\max} = \frac{\max M_{кр}}{W_{\rho}} \leq [\tau], \text{ где } W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16} - \text{полярный момент сопротивления}$$

сечения вала

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_{кр}}{\pi [\tau]}},$$

5. Как видно из эпюр, наибольший относительный угол закручивания θ_{max} (на 1 м) – на участке BC

$$\theta_{max} = \frac{\max M_{кр}}{GJ_p} = \frac{1452}{8 \cdot 10^{10} \cdot 62,5 \cdot 10^{-8}} = 0,03 \text{ рад/м.}$$

Так как $[\theta] = 0,15 + 2^\circ/\text{м}$, $\theta_{max} = 0,03 \frac{180^\circ}{\pi} = 1,7 \text{ град/м}$, т.е. условие жесткости выполняется.

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1452}{3,14 \cdot 60 \cdot 10^6}} = 4,96 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 4,96 \text{ см},$$

округляя, имеем окончательно диаметр вала.

$$d = 50 \text{ мм.}$$

4. Для построения эпюры углов закручивания вала определим углы поворота сечений C, D, E и K относительно неподвижного сечения B по формулам:

$$\varphi_C = \frac{M_{кр4}a}{GJ_p} = \frac{-1452 \cdot 1,0}{8 \cdot 10^{10} \cdot 62,5 \cdot 10^{-8}} = -0,0296 \text{ рад},$$

$$\text{где полярный момент инерции } J_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi (50 \cdot 10^{-3})^4}{32} = 62,5 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$\begin{aligned} \varphi_D &= \varphi_C + \frac{M_{кр3}b}{GJ_p} = -0,0296 + \frac{-252 \cdot 1,2}{8 \cdot 10^{10} \cdot 62,5 \cdot 10^{-8}} = \\ &= -0,0296 - 0,006 = -0,0356 \text{ рад}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_E &= \varphi_D + \frac{M_{кр2}c}{GJ_p} = -0,0356 + \frac{1148 \cdot 2,0}{8 \cdot 10^{10} \cdot 62,5 \cdot 10^{-8}} = \\ &= -0,0356 + 0,0468 = 0,0112 \text{ рад}; \end{aligned}$$

$$\varphi_K = \varphi_E + \frac{M_{кр1}d}{GJ_p} = 0,0112 + \frac{-452 \cdot 1,2}{8 \cdot 10^{10} \cdot 62,5 \cdot 10^{-8}} = 0,0112 - 0,0110 \approx 0.$$

Эпюра углов закручивания представлена на рис.6в.

Задача 5

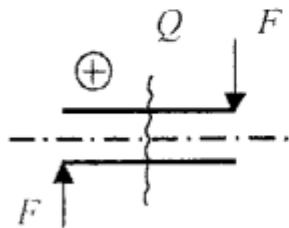
РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК

и M_H , найти $\max|M_H|$ и подобрать круглое поперечное сечение при $[\sigma] = 8 \text{ МПа}$.

Решение

Выражения для Q и M_H в любом сечении балки составляются по известным правилам, вытекающим из метода сечений:

- поперечная сила Q в некотором сечении балки равна алгебраической сумме проекций на



вертикальную ось всех внешних сил, расположенных по одну сторону от этого сечения. Для установления знаков слагаемых в этой сумме удобно использовать правило знаков, представленное на схеме, где указаны

направления внешних сил, которые включаются в выражение для Q со знаком плюс (и наоборот);

Пример 1

Для деревянной консоли, показанной на рис 8а, требуется написать выражения Q и M_H для каждого участка в общем виде, построить эпюры Q

Сечение балки подбирается из условия прочности при изгибе по нормальным напряжениям

$$\max \sigma = \frac{\max|M_H|}{W_z} \leq [\sigma]$$

Для необходимого момента сопротивления поперечного сечения балки получаем

$$W_z \geq \frac{\max|M_H|}{[\sigma]}.$$

Наибольшая величина изгибающего момента в балке определяется путем построения эпюры M_H . Затем по соответствующим формулам (в случае простой формы сечения балки) или по таблицам сортамента (в случае прокатных профилей) определяются размеры поперечного сечения балки, обеспечивающие необходимый момент сопротивления.

- изгибающий момент M_H в некотором сечении балки равен алгебраической сумме моментов относительно центра тяжести этого сечения всех внешних сил, расположенных по одну сторону от этого сечения. Соответствующее правило знаков, используемое при составлении выражения для M_H , приведено также на схеме, где показаны направления моментов внешних сил, которые включаются в выражение для M_H со знаком плюс (и наоборот).

Составляем выражения Q и M_H для каждого участка балки, показанной на рис. 8а, и вычисляя их значения в характерных точках (по границам участков и экстремумы), строим эпюры. При этом, в случае балки-консоли можно выполнить расчет, не прибегая к определению опорных реакций, если при составлении выражений для Q и M_H рассматривать силы, расположенные со стороны свободного от закреплений конца балки.

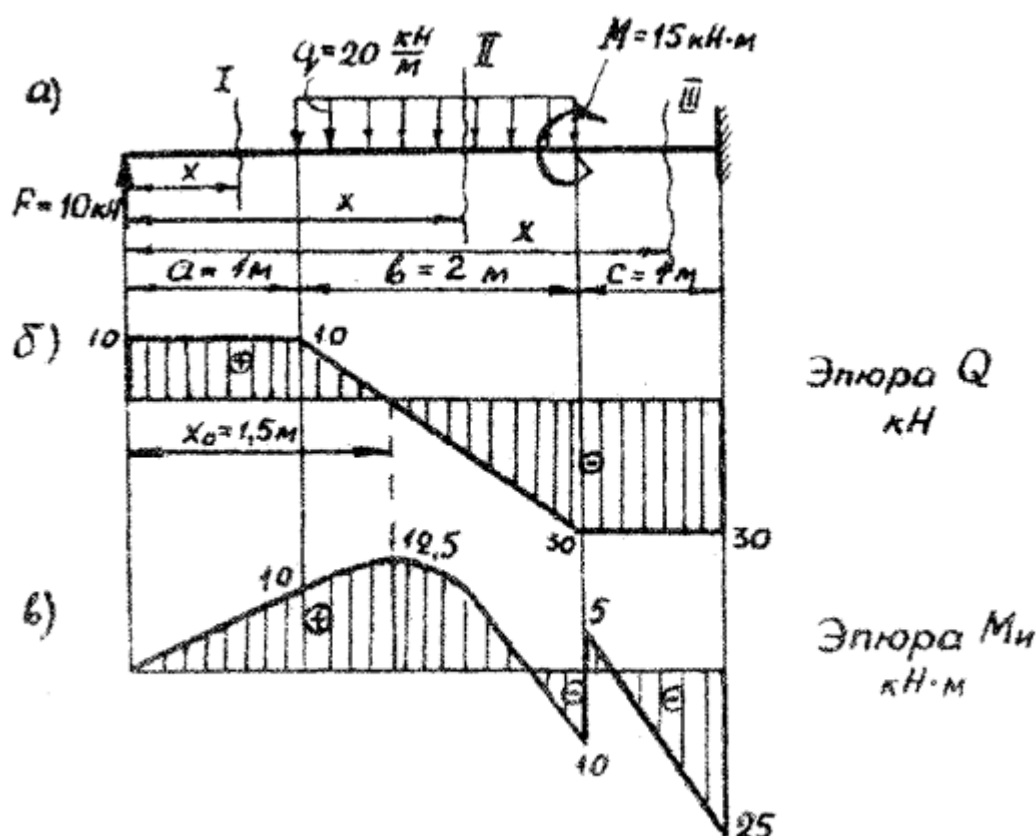


Рис.8. Расчетная схема, эпюры Q и M_H для консоли

I участок ($0 \leq x \leq 1 \text{ м}$):

$$\underline{Q}(x) = F; \quad M_H(x) = F \cdot x;$$

$$\underline{Q}(x) = \text{const} = 10 \text{ кН}; \quad M_H(0) = 0; \quad M_H(1) = 10 \cdot 1 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

II участок ($1 \text{ м} \leq x \leq 3 \text{ м}$):

$$\underline{Q}(x) = F - q(x - a); \quad M_H = Fx - q \frac{(x - a)^2}{2};$$

$$\underline{Q}(1) = 10 \text{ кН}; \quad \underline{Q}(3) = 10 - 20 \cdot (3 - 1) = -30 \text{ кН};$$

$$M_H(1) = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_H(3) = 10 \cdot 3 - 20 \frac{(3 - 1)^2}{2} = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Экстремальное значение M_H на II-м участке

$$\frac{dM_H}{dx} = \underline{Q} = F - q(x - a) \Big|_{x=x_0} = 0 \rightarrow x_0 = \frac{F}{q} + a = \frac{10}{20} + 1 = 1,5 \text{ м}.$$

Таким образом,

$$M_{\max} = M_H(x_0) = Fx_0 - q \frac{(x_0 - a)^2}{2} =$$

$$= 10 \cdot 1,5 - 20 \cdot \frac{(1,5 - 1)^2}{2} = 12,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

III участок ($3 \text{ м} \leq x \leq 4 \text{ м}$):

$$\underline{Q}(x) = F - qb; \quad M_H = F \cdot x - qb \left[x - \left(a + \frac{b}{2} \right) \right] + M;$$

$$\underline{Q} = \text{const} = 10 - 20 \cdot 2 = -30 \text{ кН};$$

$$M_H(3) = 10 \cdot 3 - 20 \cdot 2(3 - 2) + 15 = 5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_H(4) = 10 \cdot 4 - 20 \cdot 2(4 - 2) + 15 = -25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Соответствующие эпюры \underline{Q} и M_H построены на рис. 86, в. Из эпюры M_H следует, что наибольшая величина изгибающего момента равна

$$\max |M_H| = 25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Следовательно, момент сопротивления поперечного сечения балки должен быть

$$W_z \geq \frac{25 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}}{8 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2} = 3,125 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Так как для круглого сечения

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32},$$

то диаметр балки должен быть

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32W_z}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32}{3,14} \cdot 3,125 \cdot 10^{-3}} = 0,317 \text{ м.}$$

Окончательно принимаем для деревянной балки $d = 32 \text{ см}$.

Пример 2

Для стальной двухопорной балки, показанной на рис. 9а, требуется написать выражения Q и M_x для каждого участка в общем виде, построить эпюры Q и M_x , найти $\max[M_x]$ и подобрать двутавровое поперечное сечение при $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

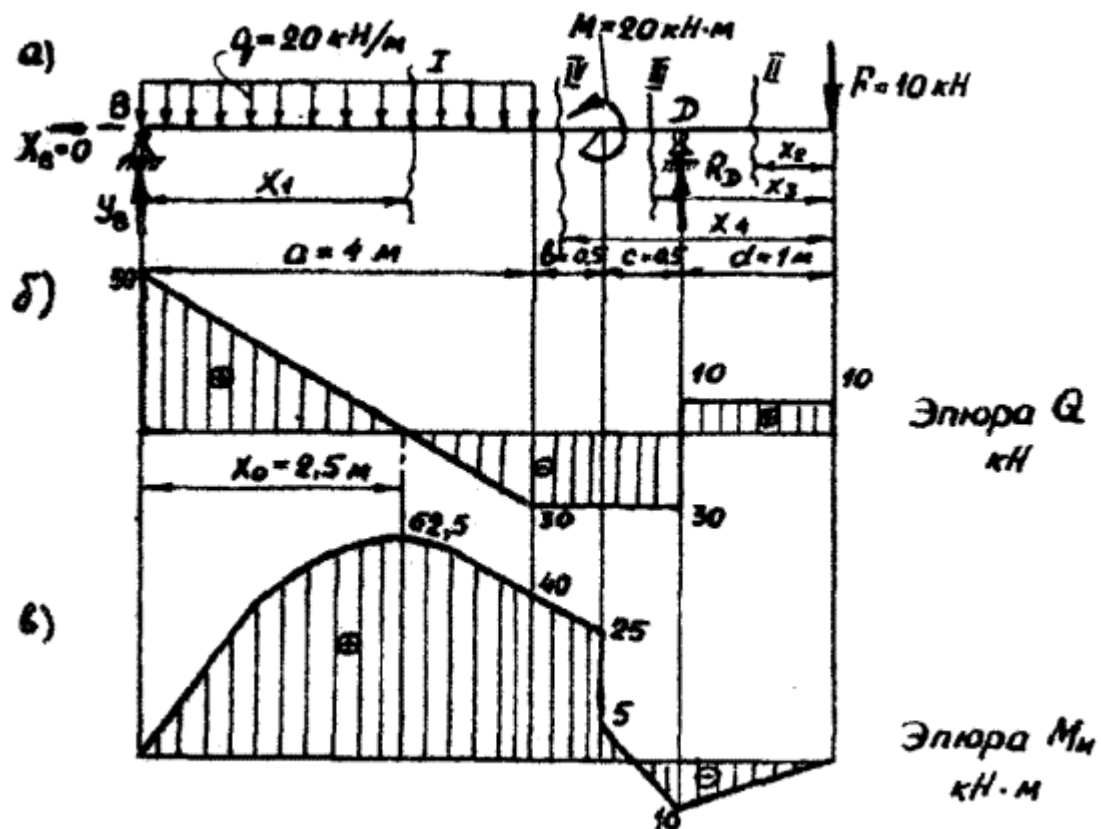


Рис. 9. Расчетная схема и эпюры Q и M_x для двухопорной балки

Решение

Опорные реакции, являющиеся частью внешней нагрузки, действующей на балку, определяются из условий равновесия:

$$\sum M_D = 0; \quad -Y_B(a+b+c) + qa\left(\frac{a}{2} + b + c\right) + M - Fd = 0;$$

$$Y_B = \frac{qa\left(\frac{a}{2} + b + c\right) + M - Fd}{a+b+c} =$$

$$= \frac{20 \cdot 4 \left(\frac{4}{2} + 0,5 + 0,5\right) + 20 - 10 \cdot 1}{4 + 0,5 + 0,5} = 50 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; \quad -qa\frac{a}{2} + M + R_D(a+b+c) - F(a+b+c+d) = 0;$$

$$R_D = \frac{\frac{qa^2}{2} - M + F(a+b+c+d)}{a+b+c} = \frac{\frac{20 \cdot 4^2}{2} - 20 + 10 \cdot (4 + 0,5 + 0,5 + 1)}{4 + 0,5 + 0,5} = 40 \text{ кН}.$$

Проверка правильности определения реакций:

$$\sum Y = 0; \quad Y_B - qa + R_D - F = 50 - 20 \cdot 4 + 40 - 10 = 0.$$

После определения реакций расчет выполняется так же, как и в предыдущем примере для балки-консоли, причем здесь при составлении выражений для Q и M_n рассматривают ту часть балки, для которой этот расчет можно сделать проще.

Участок I ($0 \leq x_1 \leq 4 \text{ м}$):

$$Q(x_1) = Y_B - qx_1; \quad M_n(x_1) = Y_B x_1 - \frac{qx_1^2}{2}; \quad Q(0) = Y_B = 50 \text{ кН};$$

$$Q(4) = 50 - 20 \cdot 4 = -30 \text{ кН}; \quad M_n(0) = 0; \quad M_n(4) = 50 \cdot 4 - \frac{20 \cdot 4^2}{2} = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Экстремальное значение M_n на I-м участке

$$\frac{dM_n}{dx_1} = Q = Y_B - qx_1 \Big|_{x_1=x_0} = 0; \quad x_0 = \frac{Y_B}{q} = \frac{50}{20} = 2,5 \text{ м};$$

$$\max M = M_n(x_0) = 50 \cdot 2,5 - \frac{20 \cdot 2,5^2}{2} = 62,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок II: ($1 \geq x_2 \geq 0$):

$$Q(x_2) = F; \quad M_H(x_2) = -Fx_2;$$

$$Q(x_2) = \text{const} = 10 \text{ кН}; \quad M_H(0) = 0; \quad M_H(1) = -10 \cdot 1 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок III ($1,5 \text{ м} \geq x_3 \geq 1 \text{ м}$):

$$Q(x_3) = F - R_D; \quad M_H(x_3) = -Fx_3 + R_D(x_3 - d);$$

$$Q(x_3) = \text{const} = 10 - 40 = -30 \text{ кН};$$

$$M_H(1) = -10 \cdot 1 + 40 \cdot (1 - 1) = -10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_H(1,5) = -10 \cdot 1,5 + 40 \cdot (1,5 - 1) = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок IV ($2 \text{ м} \geq x_4 \geq 1,5 \text{ м}$):

$$Q(x_4) = F - R_D; \quad M_H(x_4) = -Fx_4 + R_D(x_4 - d) + M;$$

$$Q(x_4) = \text{const} = 10 - 40 = -30 \text{ кН};$$

$$M_H(1,5) = -10 \cdot 1,5 + 40 \cdot (1,5 - 1) + 20 = 25 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_H(2) = -10 \cdot 2 + 40 \cdot (2 - 1) + 20 = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Эпюры Q и M_H , построенные по вычисленным значениям ординат в характерных сечениях балки, приведены на рис. 9б, 9в. Так как наибольшая величина изгибающего момента в этой балке равна

$$\max |M_H| = 62,5 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

то момент сопротивления её поперечного сечения должен быть

$$W_z \geq \frac{62,5 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}}{160 \cdot 10^6 \text{ Н} / \text{м}^2} = 0,39 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 390 \text{ см}^3.$$

По таблицам сортамента прокатной стали находим двутавр № 27а с ближайшим большим значением момента сопротивления $W_z = 407 \text{ см}^3$.

Отметим, что можно принимать профиль с ближайшим меньшим значением момента сопротивления, если это вызывает в балке появление напряжений, превышающих допускаемые не более, чем на 5%.

Задача 6

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ ОДНОПРОЛЕТНОЙ БАЛКИ

В статически неопределимых балках число неизвестных опорных реакций всегда превышает число возможных уравнений равновесия. Некоторые реакции являются как бы добавочными “лишними”, которые называются лишними неизвестными. Число лишних неизвестных определяет степень статической неопределимости системы, т.е.

$$CCH - m = 3,$$

где m – число всех опорных реакций (независимых уравнений статики) равно трем.

Для расчета статически неопределимой балки отбрасывают лишние связи, заменяя их действие лишними неизвестными, тем самым превращая заданную балку в статически определимую. Полученная балка называется основной системой. Для определения лишних неизвестных составляют уравнения совместности деформаций, смысл которых заключается в том, что основная система под воздействием приложенной нагрузки и лишних неизвестных деформируется так же, как и заданная статически неопределимая балка. Решая совместно эти уравнения и уравнения статики, определяют лишние неизвестные, после чего строят эпюры внутренних усилий, как для обычной статически определимой балки.

Пример

Для балки, изображенной на рис. 10а, требуется:

- 1) найти изгибающий момент на левой опоре (в долях ql^2);
- 2) построить эпюры Q и M ;
- 3) построить эпюру прогибов, вычислив три ординаты в пролете и две на консоли.

Решение

Устанавливаем степень статической неопределимости:

$CCH = 4 - 3 = 1$, т.е. заданная система имеет одну лишнюю неизвестную.

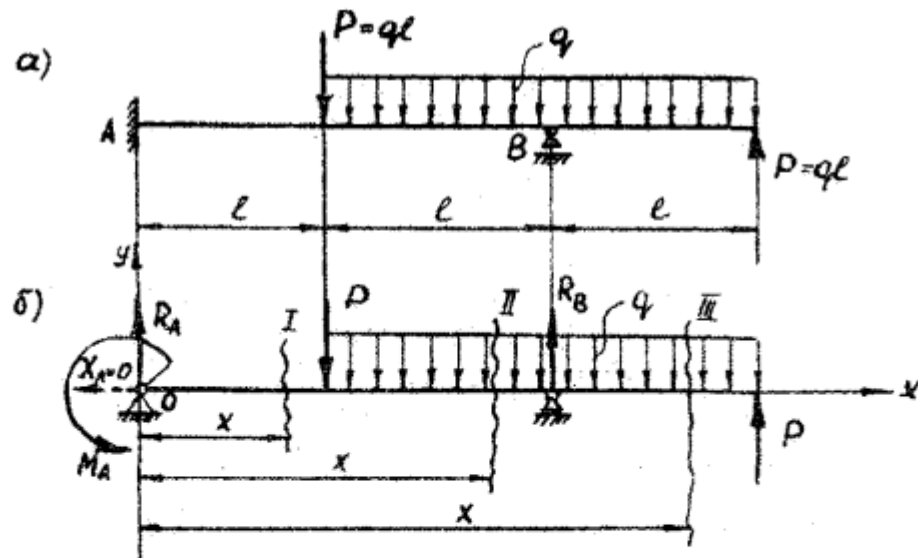


Рис.10. Заданная и основная системы

1. Выбираем основную систему в виде свободно лежащей на двух опорах балки, заменив жесткую заделку шарнирно-неподвижной опорой и неизвестным моментом M_A (рис.10б). Для определения трех неизвестных: лишнего неизвестного – момента M_A и реакций R_A и R_B составим два уравнения статики и уравнение совместности деформаций, выражающее ту мысль, что прогиб на правой опоре равен нулю:

$$\sum M_o = 0; \quad M_A - Pl - q \cdot 2l \cdot 2l + R_B \cdot 2l + P \cdot 3l = 0, \quad (1)$$

$$\text{откуда: } R_B = \frac{Pl + 4ql^2 - 3Pl - M_A}{2l} = ql - \frac{M_A}{2l};$$

$$\sum M_B = 0; \quad Pl + Pl + M_A - R_A \cdot 2l = 0, \quad (2)$$

$$\text{откуда } R_A = \frac{2Pl + M_A}{2l} = ql + \frac{M_A}{2l}.$$

Для составления уравнения совместности деформаций воспользуемся методом начальных параметров. Поместим начало координат на левом конце балки (т.А) и направим оси x и y так, как это показано на рис.10б.

Уравнение прогибов балки в нашем случае имеет вид:

$$EJy(x) = EJy_0 + EJ\theta_0 x + \frac{M_0 x^2}{2!} + \frac{Q_0 x^3}{3!} \Big|_I - \frac{P(x-l)^3}{3!} - \frac{q(x-l)^4}{4!} \Big|_{II} + \frac{R_B(x-2l)^3}{3!} \Big|_{III} \quad (3)$$

Устанавливаем значения известных начальных параметров для заданной балки:

$$\text{при } x = 0, y_0 = 0, \theta_0 = 0, M_0 = -M_A, Q_0 = R_A = ql + \frac{M_A}{2l}.$$

Подставляя их в уравнение (3), получим

$$EIy(x) = -M_A \frac{x^2}{2} + \left(ql + \frac{M_A}{2l}\right) \frac{x^3}{6} - \frac{P(x-l)^3}{6} - \frac{q(x-l)^4}{24} + \frac{R_B(x-2l)^3}{6} \quad (4)$$

Следует помнить, что при вычисления прогибов в каком-либо сечении все нагрузки, расположенные правее этого сечения, должны быть отброшены.

Определим неизвестный опорный момент M_A из граничных условий, т. е. условия закрепления балки на правой опоре (т. В):

$$\text{при } x = 2l, \quad y(2l) = 0.$$

Из уравнения (4) таким образом получаем:

$$0 = -\frac{M_A(2l)^2}{2} + \left(ql + \frac{M_A}{2}\right) \cdot \frac{(2l)^3}{6} - \frac{Pl^3}{6} - \frac{ql^4}{24}; \quad M_A = \frac{27}{32}ql^2.$$

Подставляя найденный момент M_A в выражения для реакций R_A и R_B , находим:

$$R_A = ql + \frac{M_A}{2l} = \frac{91}{64}ql; \quad R_B = ql - \frac{M_A}{2l} = \frac{37}{64}ql$$

2. Составляем выражения Q и M для каждого участка балки, показанной на рис. 11а, и вычисляя их значения в характерных точках (по границам участков и экстремумы), строим эпюры.

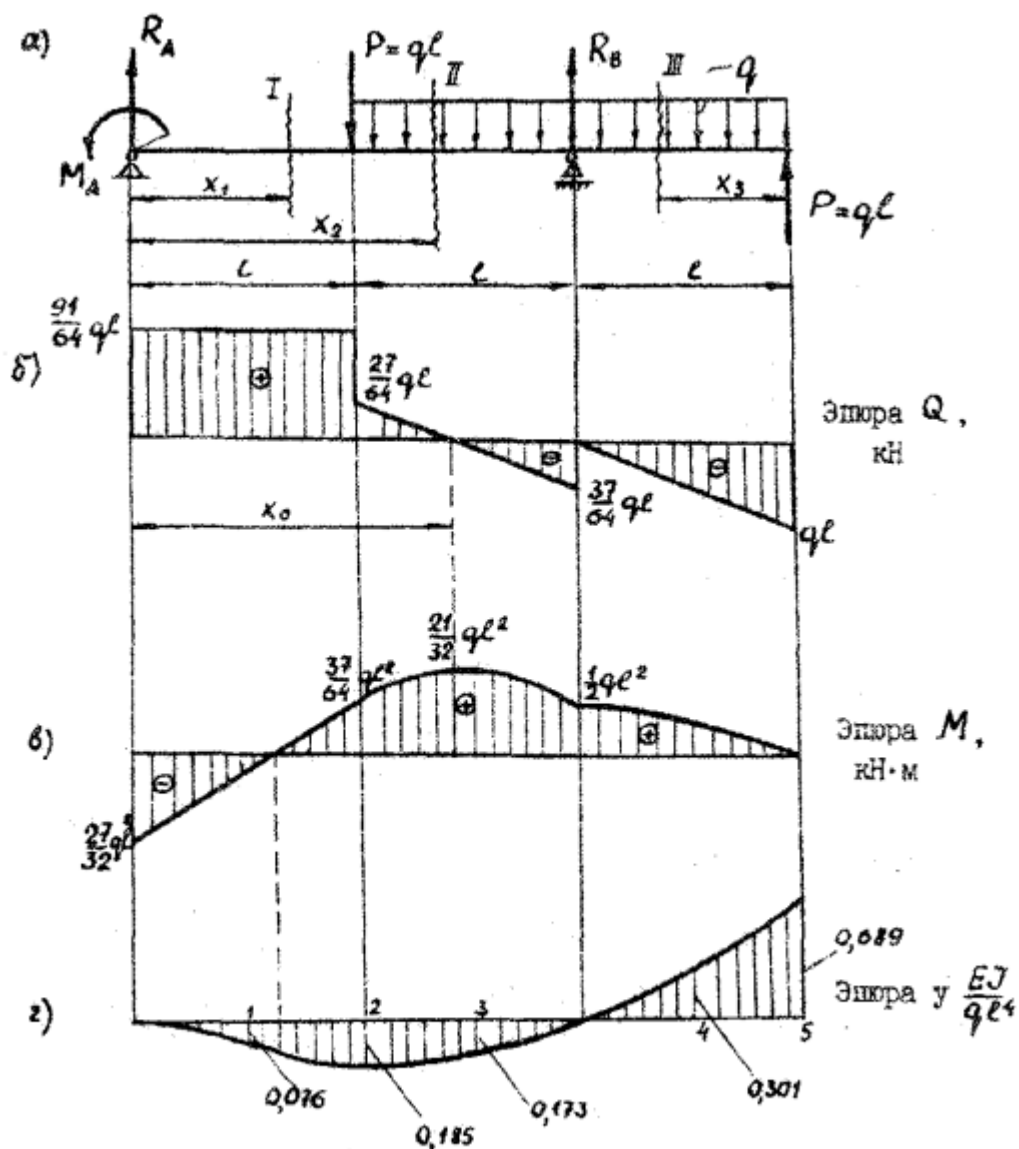


Рис.11. Расчетная схема, эпюры Q , M и $y(x)$

I участок ($0 \leq x_1 \leq \ell$):

$$Q(x_1) = R_A; \quad M(x_1) = R_A \cdot x_1 - M_A;$$

$$Q(x_1) = \text{const} = \frac{91}{64}q\ell; \quad M(0) = -M_A = -\frac{27}{32}q\ell^2; \quad M(\ell) = R_A \ell - M_A = \frac{37}{64}q\ell^2.$$

II участок ($\ell \leq x_2 \leq 2\ell$):

$$Q(x_2) = R_A - P - q(x_2 - \ell); \quad M(x_2) = R_A \cdot x_2 - M_A - P(x_2 - \ell) - q \cdot \frac{(x_2 - \ell)^2}{2};$$

$$Q(\ell) = R_A - P = \frac{27}{64}q\ell; \quad Q(2\ell) = R_A - P - q\ell = -\frac{37}{64}q\ell;$$

$$M(\ell) = R_A \cdot \ell - M_A = \frac{37}{64}q\ell^2; \quad M(2\ell) = R_A \cdot 2\ell - M_A - P \cdot \ell - \frac{q\ell^2}{2} = \frac{q\ell^2}{2}.$$

Исследуем кривую на экстремум на II участке

$$\frac{dM(x_2)}{dx_2} = Q(x_2) = R_A - P - q(x_2 - l) \Big|_{x_2 = x_0} = 0,$$

$$\text{откуда } x_0 = \frac{R_A - P + ql}{q} = \frac{91}{64}l (м);$$

$$\max M(x_0) = R_A \cdot x_0 - M_A - P(x_0 - l) - q \frac{(x_0 - l)^2}{2} = \frac{21}{32}ql^2.$$

III участок ($0 \leq x_3 \leq l$):

$$Q(x_3) = -P + q \cdot x_3; \quad M(x_3) = P \cdot x_3 - q \frac{x_3^2}{2}; \quad Q(0) = -P = -ql;$$

$$Q(l) = -P + q \cdot l = 0; \quad M(0) = 0; \quad M(l) = P \cdot l - \frac{q \cdot l^2}{2} = \frac{q \cdot l^2}{2}.$$

Эпюры Q и M представлены на рис. 11б, в.

3. Пользуясь уравнением прогибов балки (4), определяем прогибы пяти сечений балки.

После подстановки в уравнение (4) выражений для M_A , R_A и R_B получим следующее выражение прогибов балки:

$$EJy(x) = -0,422ql^2x^2 + 0,237qlx^3 - 0,167ql(x-l)^3 - 0,042q(x-l)^4 + 0,096ql(x-2l)^3;$$

$$\text{при } x = \frac{l}{2} \quad EJy\left(\frac{l}{2}\right) = -0,422ql^2\left(\frac{l}{2}\right)^2 + 0,237ql\left(\frac{l}{2}\right)^3 = -0,076ql^4;$$

$$\text{при } x = l \quad EJy(l) = -0,422ql^2(l)^2 + 0,237ql(l)^3 = -0,185ql^4;$$

при $x = 1,5l$

$$EJy(1,5l) = -0,422ql^2(1,5l)^2 + 0,237ql(1,5l)^3 - 0,167ql(0,5l)^3 - 0,042q(0,5l)^4 = -0,173ql^4;$$

при $x = 2,5l$

$$EJy(2,5l) = -0,422ql^2(2,5l)^2 + 0,237ql(2,5l)^3 - 0,167ql(1,5l)^3 - 0,042q(1,5l)^4 + 0,096ql(0,5l)^3 = 0,301ql^4;$$

при $x = 3l$

$$EJy(3l) = -0,422ql^2(3l)^2 + 0,237ql(3l)^3 - 0,167ql(2l)^3 - 0,042q(2l)^4 + 0,096ql(l)^3 = 0,689ql^4.$$

Эпюра прогибов $y(x)$ приведена на рис.11г. При построении эпюры надо учесть, что упругая линия балки обращена выпуклостью вниз там, где изгибающий момент положительный, и выпуклостью вверх там, где изгибающий момент отрицательный. Нулевым точкам эпюры соответствуют точки перегиба упругой линии.

Литература

1.Сопротивление материалов. Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников всех специальностей технических высших учебных заведений, кроме строительных.- М.: Высшая школа, 1985.

2.Прикладная механика. Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников инженерно-технических специальностей высших учебных заведений.- М.: Высшая школа, 1982.

Примечание: список всей основной и дополнительной литературы представлен в методических указаниях [1] и [2].

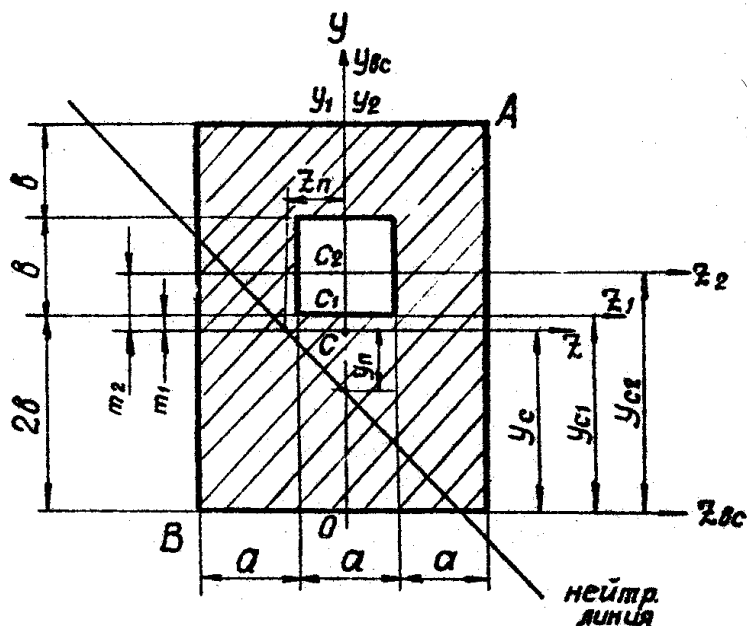
**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ
РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНЫХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ» ДЛЯ СТУДЕНТОВ
МЕХАНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ (часть 2)**

Задача 7

РАСЧЕТ СТЕРЖНЯ НА ВНЕЦЕНТРЕННОЕ СЖАТИЕ

Чугунный короткий стержень, поперечное сечение которого изображено на рис. 12, сжимается продольной силой P , приложенной в точке A . Требуется:

- 1) вычислить наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающее напряжение в поперечном сечении, выразив величины этих напряжений через P и размеры сечения;



- 2) найти допускаемую нагрузку $[P]$ при заданных размерах сечения и допускаемых напряжениях для чугуна на сжатие $[\sigma_c]=110$ МПа и на растяжение $[\sigma_p]=21$ МПа. Исходные данные: $a=6$ см, $b=6$ см.

Рис.12

Решение: 1. Вычерчиваем заданное поперечное сечение в масштабе и определяем положение центра тяжести сечения C относительно выбранных вспомогательных осей z_{bc} , y_{bc} , (рис. 1), на которых ось y_{bc} является осью симметрии сечения. Поскольку ось симметрии y_{bc} - одна из главных центральных осей, то координата центра тяжести $z_c=0$, и определению подлежит лишь одна координата y_c , которую вычисляем по формуле

$$y_c = \frac{\sum F_i y_{ci}}{\sum F_i} = \frac{F_1 y_{c1} - F_2 y_{c2}}{F_1 - F_2} = \frac{432 \cdot 12 - 36 \cdot 15}{432 - 36} = 11,7 \text{ см},$$

где площади прямоугольников равны соответственно:

$$F_1 = 4b \cdot 3a = 24 \cdot 18 = 432 \text{ см}^2,$$

$$F_2 = b \cdot a = 6 \cdot 6 = 36 \text{ см}^2;$$

y_{ci} – расстояние от центра тяжести i -ого элемента до вспомогательной

оси z_{bc} : $y_{c1} = 2b = 12 \text{ см}$, $y_{c2} = 2b + \frac{b}{2} = 12 + 3 = 15 \text{ см}$.

На чертеже показываем положение центра тяжести C всего сечения, проводим главные центральные оси y и z и определяем координаты точки A приложения силы P :

$$y_p = 4b - y_c = 4 \cdot 6 - 11,7 = 12,3 \text{ см}, \quad z_p = a + \frac{a}{2} = 9 \text{ см}.$$

Определяем главные центральные моменты инерции поперечного сечения как алгебраическую сумму моментов инерции каждого элемента сечения относительно z и y по формулам перехода к параллельным осям

$$J_z = \sum (J_{z_i} + m_i^2 F_i) \quad \text{и} \quad J_y = \sum (J_{y_i} + n_i^2 F_i),$$

где J_{z_i} и J_{y_i} – осевые моменты инерции i -го элемента сечения относительно собственных центральных осей, параллельных осям z и y ; выражения J_{z_i} и J_{y_i} для некоторых простых фигур приведены в табл. 1 (см. приложение);

$m_i = y_{c_i} - y_c$ и $n_i = z_{c_i} - z_c$ – расстояния между центральными осями элементов сечения и центральными осями всего сечения.

$$J_z = \left(\frac{18 \cdot 24^3}{12} + (12 - 11,7)^2 \cdot 18 \cdot 24 \right) - \left(\frac{6 \cdot 6^3}{12} + (15 - 11,7)^2 \cdot 6 \cdot 6 \right) = 202 \cdot 10^2 \text{ см}^4,$$

$$J_y = \frac{24 \cdot 18^3}{12} - \frac{6 \cdot 6^3}{12} = 116 \cdot 10^2 \text{ см}^4.$$

Вычисляем квадраты радиусов инерции поперечного сечения относительно главных осей z , y по формулам:

$$i_z^2 = \frac{J_z}{F} = \frac{202 \cdot 10^2}{396} = 50,98 \text{ см}^2,$$

$$i_y^2 = \frac{J_y}{F} = \frac{116 \cdot 10^2}{396} = 29,27 \text{ см}^2.$$

Вычисляем отрезки z_n , y_n , отсекаемые нейтральной линией на главных

осях по формулам:

$$z_n = -\frac{i_y^2}{z_p} = -\frac{29,27}{9} = -3,25 \text{ см},$$

$$y_n = -\frac{i_x^2}{y_p} = -\frac{50,98}{12,3} = -4,14 \text{ см}.$$

По найденным значениям отрезков проводим нейтральную линию (рис. 1), с помощью которой устанавливаем, что наибольшее сжимающее напряжение будет в точке A , а наибольшее растягивающее напряжение - в точке B как в наиболее удаленных точках от нейтральной линии в сжатой и растянутой зонах поперечного сечения. Координаты этих точек в системе координат z, y : $z_a=9 \text{ см}$, $y_a=12,3 \text{ см}$ и $z_b=-9 \text{ см}$, $y_b=-11,7 \text{ см}$.

2. Из условия прочности для этих двух точек

$$\sigma_{max}^A = \frac{P}{F} \left(-1 - \frac{y_p \cdot y_A}{i_z^2} - \frac{z_p \cdot z_A}{i_y^2} \right) \leq [\sigma_c], \sigma_{max}^B = \frac{P}{F} \left(-1 - \frac{y_p \cdot y_B}{i_z^2} - \frac{z_p \cdot z_B}{i_y^2} \right) \leq [\sigma_p]$$

определяем величину допускаемой нагрузки $[P]$. В этих формулах каждое из слагаемых целесообразно подставлять со своим знаком, определяемым по характеру деформации бруса, а координаты точек брать по абсолютному значению.

$$[P]' \leq \frac{[\sigma_c] \cdot F}{-1 - \frac{y_p \cdot y_A}{i_z^2} - \frac{z_p \cdot z_A}{i_y^2}} = \frac{110 \cdot 10^6 \cdot 396 \cdot 10^{-4}}{1 + \frac{12,3 \cdot 12,3}{50,98} + \frac{9 \cdot 9}{29,27}} = 646 \text{ кН},$$

$$[P]'' \leq \frac{[\sigma_p] \cdot F}{-1 - \frac{y_p \cdot y_B}{i_z^2} - \frac{z_p \cdot z_B}{i_y^2}} = \frac{21 \cdot 10^6 \cdot 396 \cdot 10^{-4}}{1 + \frac{12,3 \cdot 11,7}{50,98} + \frac{9 \cdot 9}{29,27}} = 181 \text{ кН}.$$

Окончательно из двух значений допускаемой нагрузки принимаем наименьшее, т.е.

$$[P] = 181 \text{ кН}.$$

Задача 8

ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ БРУСЬЕВ С ЛОМАННОЙ ОСЬЮ

На рис. 13 изображена в аксонометрии ось ломаного стержня круглого поперечного сечения, расположенная в горизонтальной плоскости и имеющая прямые углы в точках A и B . На стержень действует вертикальная нагрузка. Требуется:

- 1) построить отдельно (в аксонометрии) эпюры изгибающих и крутящих моментов;
- 2) установить опасное сечение и найти для него расчетный момент по четвертой теории прочности.

Внутренние силовые факторы определяются методом сечений. Условимся в проведенном сечении ось x совмещать с осью стержня на рассматриваемом участке, оси y и z — с главными центральными осями инерции сечения (в круглом сечении все центральные оси являются главными).

Для вычисления значений изгибающих и крутящих моментов в данном сечении необходимо составить алгебраические суммы моментов относительно этих осей всех внешних сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения. Момент относительно оси x равен крутящему моменту $M_{кр}$, а моменты относительно осей y и z — соответственно изгибающим моментам M_y и M_z . При этом не вводятся какие-либо новые правила знаков в случае пространственного стержня, а лишь уточняются некоторые детали. Так, например, эпюры изгибающих моментов, как и ранее, строят на сжатых волокнах и ориентируют их таким образом, чтобы плоскость эпюры совпадала с плоскостью действия пары того изгибающего момента, для которого она построена (в данном примере — это вертикальные плоскости); знаки используются только в случае необходимости записать соответствующее уравнение, а на эпюрах они не указываются. Эпюра крутящих моментов не связывается с какой-либо определенной плоскостью. Знак крутящего момента считается положительным, если при взгляде в торец стержня в проведенном сечении видим его направленным по часовой стрелке.

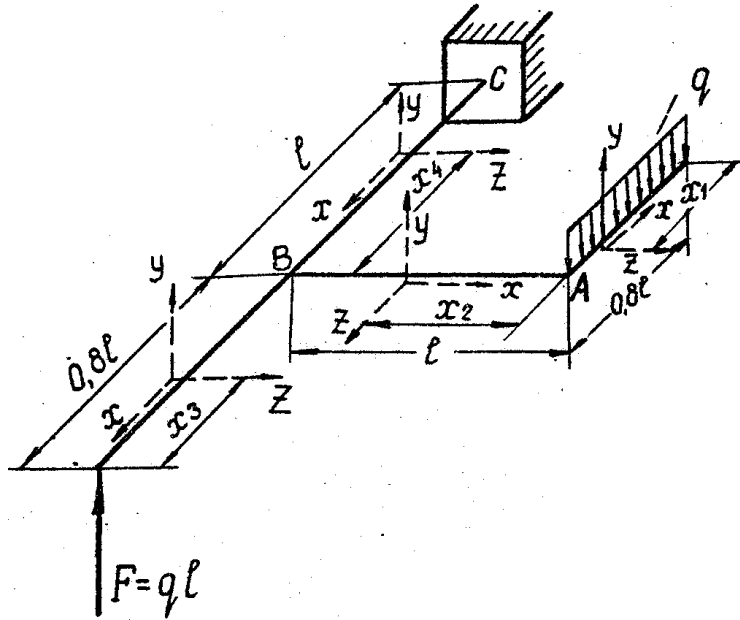


Рис. 13. Расчетная схема стержня с ломаной осью

Решение: 1. Последовательно на каждом из четырех участков стержня проводим сечение, рассматривая всякий раз ту часть стержня, которая расположена со стороны его свободного от закрепления конца (с тем, чтобы в расчете обойтись без определения опорных реакций). На рис. 13 показано принятое положение координатных осей в проведенных сечениях. Так как в горизонтальной плоскости изгибающих моментов нет, то на всех участках $M_y = 0$. Составим выражения для изгибающих моментов $M_z = M_u$ и крутящих моментов $M_{кр}$:

1 участок ($0 \leq x_1 \leq 0,8l$):

$$M_u = -\frac{qx_1^2}{2};$$

$$M_{кр} = 0.$$

2 участок ($0 \leq x_2 \leq l$):

$$M_u = 0,8ql \cdot x_2;$$

$$M_{кр} = 0,8ql \cdot 0,4l = 0,32ql^2.$$

3 участок ($0 \leq x_3 \leq 0,8l$):

$$M_u = ql \cdot x_3;$$

$$M_{кр} = 0.$$

4 участок ($0 \leq x_4 \leq l$):

$$M_u = ql(0,8l \cdot x_4) - 0,8ql(x_4 - 0,4l);$$

$$M_{кр} = 0,8ql \cdot l = 0,8ql^2.$$

Эпюры строим, вычисляя значения полученных выражений в характерных точках (в начале и на конце каждого участка), и лишь на первом участке, где имеется параболическая зависимость, требуется дополнительный анализ (рис. 14).

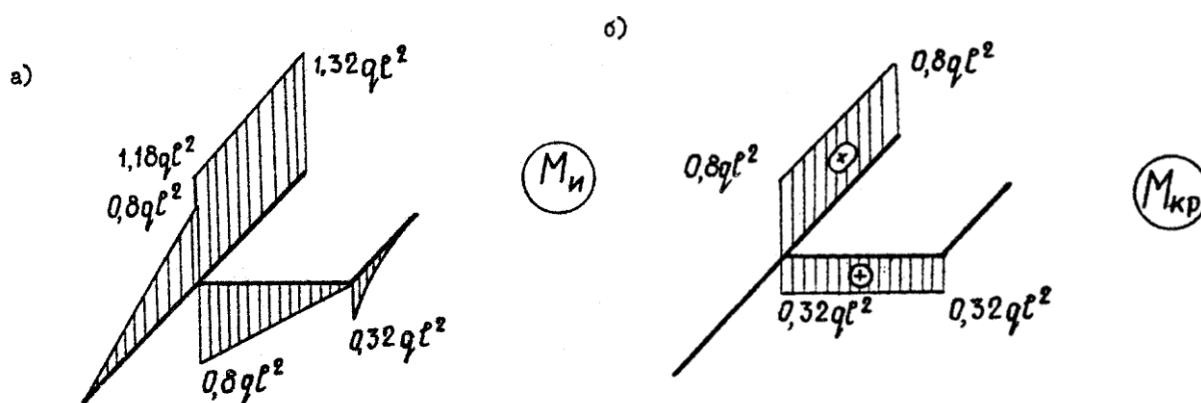


Рис. 14. Эпюры изгибающих (а) и крутящих (б) моментов

2. Из рассмотрения эпюр следует, что наиболее опасным сечением стержня является сечение в заделке. Величина расчетного момента в этом сечении по четвертой теории прочности равна:

$$M_{рас}^{IV} = \sqrt{M_u^2 + 0,75M_{кр}^2} = \sqrt{(1,32ql^2)^2 + (0,8ql^2)^2} = 1,54ql^2.$$

Задача 9

ИЗГИБ С КРУЧЕНИЕМ БРУСЬЕВ КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

Шкив с диаметром $D_1 = 0,6$ м и с углом наклона ветвей ремня к горизонту $\alpha_1 = 45^\circ$ делает $n = 500$ оборотов в минуту и передает мощность $N = 75$ кВт.

Два других шкива имеют одинаковый диаметр $D_2 = 0,4$ м и одинаковые углы наклона ветвей ремня к горизонту $\alpha_2 = 45^\circ$, каждый из них передает мощность $\frac{N}{2}$ (рис. 15). Требуется:

- 1) определить моменты, приложенные к шкивам, по заданным величинам n и N ;
- 2) построить эпюру крутящих моментов $M_{кр}$;
- 3) определить окружные усилия t_1 и t_2 , действующие на шкивы, по найденным моментам и заданным диаметрам шкивов D_1 и D_2 ;
- 4) определить давления на вал, принимая их равными трем окружным усилиям;
- 5) определить силы, изгибающие вал в горизонтальной и вертикальной плоскостях (вес шкивов и вала не учитывать);
- 6) построить эпюры изгибающих моментов от горизонтальных сил $M_{гор}$ и от вертикальных сил $M_{верт}$;
- 7) построить эпюру суммарных изгибающих моментов M_u ;
- 8) при помощи эпюр $M_{кр}$ и M_u найти опасное сечение и определить величину максимального расчета момента (по третьей теории прочности);
- 9) подобрать диаметр вала d при $[\sigma]=70$ МПа.

Исходные данные: $a=1$ м, $b=1,5$ м, $c=1,5$ м.

Решение. Шкив 1 – ведущий, шкивы 2 и 3 (одинакового диаметра) – ведомые. T – натяжение ведущей ветви, $t = \frac{T}{2}$ – натяжение ведомой ветви передачи.

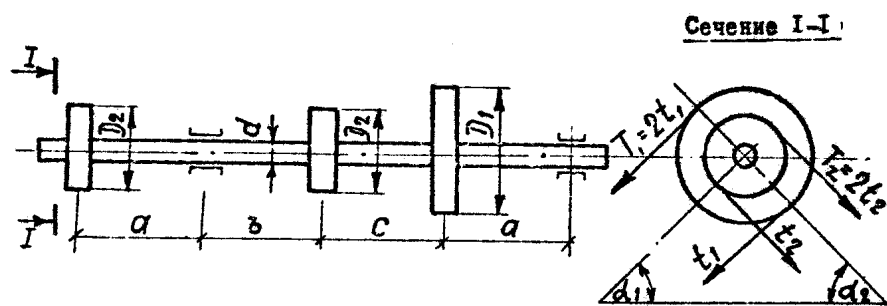


Рис. 15. Схема трансмиссионного нагружения вала

1. Скручивающие моменты, приложенные к шкивам, по заданным величинам n и N определяются по формулам:

$$M_1 = \frac{N}{n \frac{\pi}{30}} = \frac{75 \cdot 10^3}{500 \frac{3,14}{30}} = 1433,12 \text{ Н·м},$$

$$M_2 = \frac{\frac{N}{2}}{n \frac{\pi}{30}} = \frac{\frac{75 \cdot 10^3}{2}}{500 \frac{3,14}{30}} = 716,56 \text{ Н·м.}$$

2. Определяем значения крутящих моментов на участках вала как сумму моментов по одну сторону от рассматриваемого участка на расчетной схеме вала (рис. 16 б)

$$M_{кр}^{AC} = M_2 = 716,56 \text{ Н·м,}$$

$$M_{кр}^{CD} = M_2 + M_1 = 1433,12.$$

Строим эпюру крутящих моментов (рис. 16 в).

3. Определяем окружные усилия t_1 и t_2 , действующие на шкивы:

$$\text{шкив 1: } M_1 = (T_1 - t_1) \frac{D_1}{2} = (2t_1 - t_1) \frac{D_1}{2} = \frac{t_1 D_1}{2},$$

следовательно,

$$t_1 = \frac{2M_1}{D_1} = \frac{2 \cdot 1433,12}{0,6} = 4777 \text{ Н;}$$

$$\text{шкив 2: } M_2 = (T_2 - t_2) \frac{D_2}{2} = (2t_2 - t_2) \frac{D_2}{2} = \frac{t_2 D_2}{2},$$

следовательно,

$$t_2 = \frac{2M_2}{D_2} = \frac{2 \cdot 716,56}{0,4} = 3583 \text{ Н.}$$

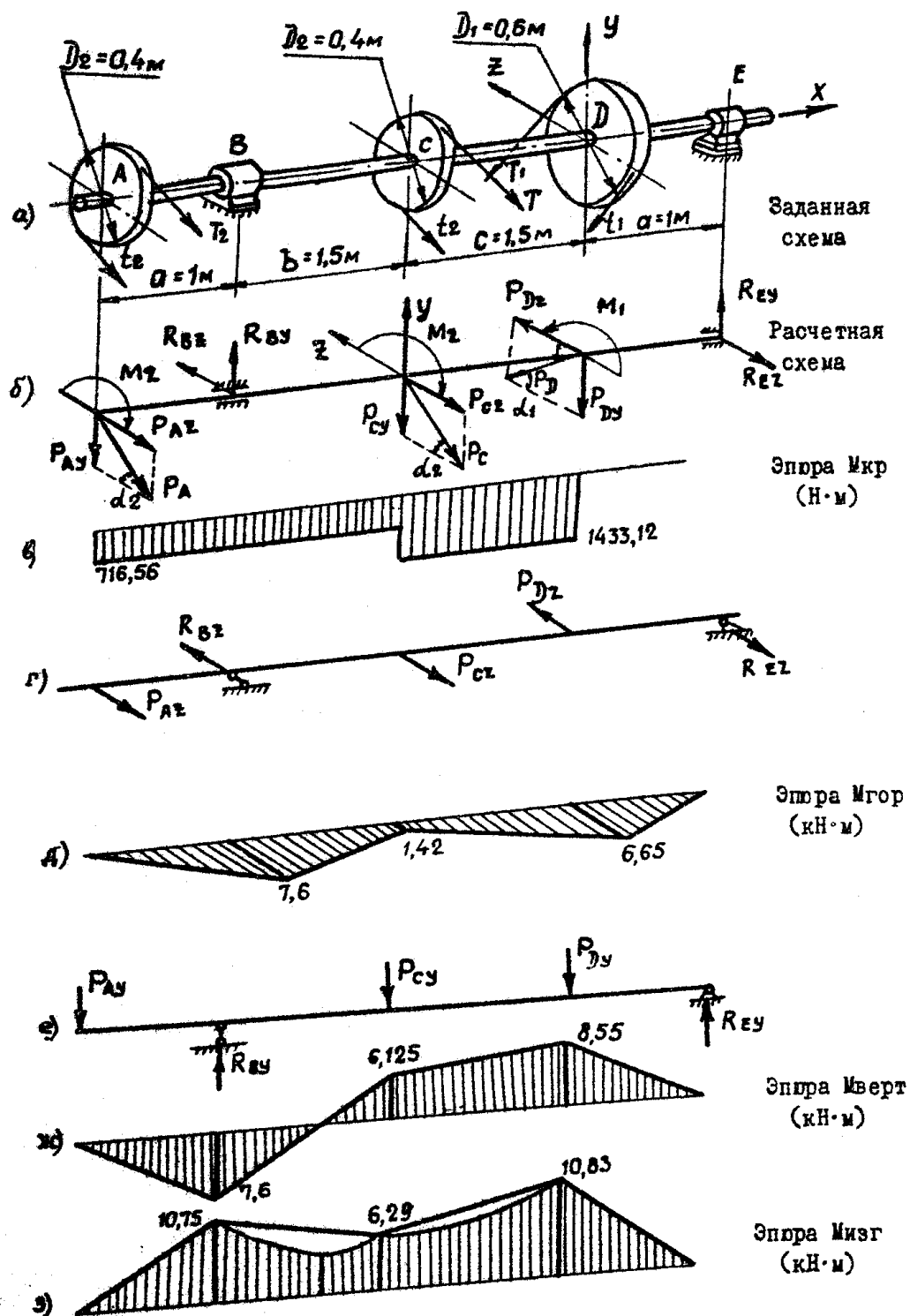


Рис. 16. Расчетные схемы вала и эпюры

4. Определяем давления на вал

$$P_A = 3t_2 = 3 \cdot 3583 = 10,75 \text{ кН},$$

$$P_C = 3t_2 = 3 \cdot 3583 = 10,75 \text{ кН},$$

$$P_D = 3t_1 = 3 \cdot 4777 = 14,33 \text{ кН}.$$

5. Определяем силы, изгибающие вал в горизонтальных и вертикальных плоскостях (вес шкивов и вала не учитывается) (рис. 5 б):

в горизонтальной плоскости:

$$P_{A_z} = P_A \cdot \cos \alpha_2 = 10,75 \cdot \cos 45^\circ = 7,6 \text{ кН},$$

$$P_{C_z} = P_C \cdot \cos \alpha_2 = 10,75 \cdot \cos 45^\circ = 7,6 \text{ кН},$$

$$P_{D_z} = P_D \cdot \cos \alpha_1 = 14,33 \cdot \cos 45^\circ = 10,13 \text{ кН},$$

$$\begin{aligned} R_{B_z} &= \frac{P_{A_z}(a+b+c+a) + P_{C_z}(c+a) - P_{D_z} \cdot a}{b+c+a} = \\ &= \frac{7,6(1+1,5+1,5+1) + 7,6(1,5+1) - 10,13 \cdot 1}{1,5+1,5+1} = 11,72 \text{ кН}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{E_z} &= \frac{P_{A_z}a - P_{C_z}b + P_{D_z}(b+c)}{b+c+a} = \\ &= \frac{7,6 \cdot 1 - 7,6 \cdot 1,5 + 10,13(1,5+1,5)}{1,5+1,5+1} = 6,65 \text{ кН}; \end{aligned}$$

в вертикальной плоскости:

$$P_{A_y} = P_A \cdot \sin \alpha_2 = 10,75 \cdot \sin 45^\circ = 7,6 \text{ кН},$$

$$P_{C_y} = P_C \cdot \sin \alpha_2 = 10,75 \cdot \sin 45^\circ = 7,6 \text{ кН},$$

$$P_{D_y} = P_D \cdot \sin \alpha_1 = 14,33 \cdot \sin 45^\circ = 10,13 \text{ кН},$$

$$\begin{aligned} R_{B_y} &= \frac{P_{A_y}(a+b+c+a) + P_{C_y}(c+a) + P_{D_y} \cdot a}{b+c+a} = \\ &= \frac{7,6(1+1,5+1,5+1) + 7,6(1,5+1) + 10,13 \cdot 1}{1,5+1,5+1} = 16,78 \text{ кН}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{E_y} &= \frac{P_{C_y}b + P_{D_y}(b+c) - P_{A_y}a}{b+c+a} = \\ &= \frac{10,13(1,5+1,5) + 7,6 \cdot 1,5 - 7,6 \cdot 1}{1,5+1,5+1} = 8,55 \text{ кН}. \end{aligned}$$

6. Расчет и построение эпюр изгибающих моментов от горизонтальных сил $M_{гор}$ и вертикальных сил $M_{верт}$.

Изгиб в горизонтальной плоскости (рис. 5 г)

$$M_{гор}^A = 0; \quad M_{гор}^B = P_{A_z} \cdot a = 7,6 \cdot 1 = 7,6 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{гор}^C = P_{A_z}(a+b) - R_{B_z} \cdot b = 7,6 \cdot (1+1,5) - 11,72 \cdot 1,5 = 1,42 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{гор}^E = R_{E_z} \cdot a = 6,65 \cdot 1 = 6,65 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_{вер}^E = 0.$$

Эпюра изгибающих моментов в вертикальной плоскости представлена на рис. 5 ж.

7. Расчет и построение эпюры суммарных изгибающих моментов.

По значениям эпюр $M_{гор}$ и $M_{вер}$ определяем суммарные изгибающие моменты в сечениях вала по формуле

$$M_u = \sqrt{M_{гор}^2 + M_{вер}^2};$$

$$M_u^A = 0; M_u^B = \sqrt{7,6^2 + 7,6^2} = 10,75 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_u^C = \sqrt{1,42^2 + 6,125^2} = 6,29 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_u^D = \sqrt{6,65^2 + 8,55^2} = 10,83 \text{ кН}\cdot\text{м}; M_u^E = 0.$$

Эпюра суммарных изгибающих моментов изображена на рис. 5 з.

8. Определение опасного сечения из эпюр $M_{кр}$ и M_u и величины максимального расчетного момента (по третьей теории прочности).

Опасным для вала является сечение D , где $\max|M_{кр}| = 1,443 \text{ кН}\cdot\text{м}$ и $\max|M_u| = 10,83 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

По третьей теории прочности

$$M_{рас}^3 = \sqrt{M_u^2 + M_{кр}^2} = \sqrt{10,83^2 + 1,433^2} = 10,92 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

9. Диаметр вала определяем из условия прочности

$$\sigma_{экв}^3 = \frac{M_{рас}^3}{W} \leq [\sigma],$$

где $W = \frac{\pi d^3}{32}$ - осевой момент сопротивления для вала сплошного сечения,

следовательно,

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{рас}^3}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 10,92 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 70 \cdot 10^6}} = 0,1167 \text{ м}.$$

Принимаем диаметр вала $d = 120 \text{ мм}$.

Задача 10

РАСЧЕТ СТЕРЖНЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Стальной стержень длиной $l=2,4$ м сжимается силой $P=400$ кН (рис. 17 а). Требуется:

- 1) найти размеры поперечного сечения при $[\sigma]=160$ МПа;
- 2) найти величину критической силы и коэффициентов запаса устойчивости.

Решение: 1. Один конец стойки заделан, другой свободен, и, следовательно, для нее $\mu=2$. Опасной является потеря устойчивости стержня в плоскости, в которой гибкость имеет наибольшее значение. Так как заданное поперечное сечение (рис. 17 б) симметрично относительно обеих осей y и z , то $\lambda_y = \lambda_z$.

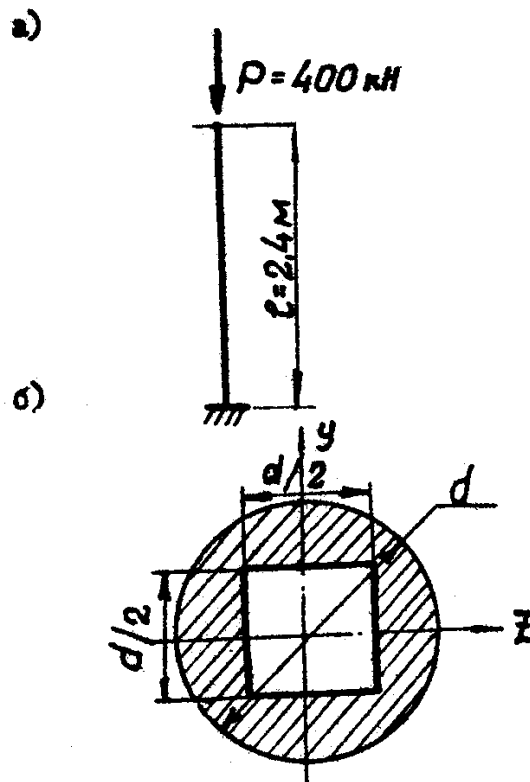


Рис. 17. Расчетная схема и поперечное сечение стержня

Выразим геометрические характеристики сечения через размер d :

площадь $F = \frac{\pi d^2}{4} - \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 0,535d^2 \text{ м}^2$;

главный момент инерции

$$J_z = J_y = \frac{\pi d^4}{64} - \frac{\left(\frac{d}{2}\right)^4}{12} = 0,0438d^4 \text{ м}^4;$$

радиус инерции

$$i_z = i_y = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{0,0438d^4}{0,535d^2}} = 0,286d \text{ м};$$

гибкость стержня $\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{min}} = \frac{2 \cdot 2,4}{0,286d} = \frac{16,8}{d}$.

В первом приближении принимаем произвольное значение коэффициента $\varphi_1 = 0,5$.

Требуемая площадь поперечного сечения стержня

$$F_{mp} \geq \frac{P}{\varphi_1 [\sigma]} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Так как $F = 0,535d^2$, следовательно,

$$d \geq \sqrt{\frac{F}{0,535}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 10^{-3}}{0,535}} = 9,66 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Тогда гибкость стержня

$$\lambda = \frac{16,8}{d} = \frac{16,8}{9,66 \cdot 10^{-2}} = 174.$$

Из таблицы 2 (см. приложение) при $\lambda = 174$ получаем интерполяцией $\varphi'_1 = 0,248$. Следовательно, значение $\varphi_1 = 0,5$ завышено.

Во втором приближении принимаем

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,5 + 0,248}{2} = 0,374.$$

Тогда требуемая площадь

$$F_{mp} \geq \frac{P}{\varphi_2 [\sigma]} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,374 \cdot 160 \cdot 10^6} = 6,7 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2,$$

откуда $d = \sqrt{\frac{6,7 \cdot 10^{-3}}{0,535}} = 1,12 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$

Определяем гибкость стержня $\lambda = \frac{16,8}{d} = \frac{16,8}{1,12 \cdot 10^{-4}} = 150$.

По таблице $\varphi = f(\lambda)$ получаем $\varphi'_2 = 0,32$.

В третьем приближении принимаем

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi'_2}{2} = \frac{0,374 + 0,32}{2} = 0,374.$$

$$\text{Тогда } F \geq \frac{P}{\varphi_3 [\sigma]} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,374 \cdot 160 \cdot 10^6} = 7,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2,$$

$$\text{откуда } d = \sqrt{\frac{7,2 \cdot 10^{-3}}{0,535}} = 1,16 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Определяем гибкость стержня $\lambda = \frac{16,8}{d} = \frac{16,8}{1,16 \cdot 10^{-4}} = 145$.

По таблице $\varphi = f(\lambda)$ получаем $\varphi'_3 = 0,34$, близкое к принятому значению в данном приближении.

2. Проверим напряжение в поперечном сечении стержня с найденным размером $d = 11,6$ см:

$$\sigma = \frac{P}{\varphi \cdot F} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,34 \cdot 0,535 \cdot (11,6 \cdot 10^{-2})^2} = 163 \text{ МПа} > [\sigma],$$

$$\Delta\sigma = \frac{163 - 160}{163} \cdot 100\% = 1,8\%, \text{ что допустимо,}$$

т.е. условие устойчивости удовлетворяется.

Так как гибкость стального стержня $\lambda > 100$, критическую силу найдем по формуле Эйлера:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,0438 \cdot (11,6 \cdot 10^{-2})^4}{(2 \cdot 2,4)^2} = 3750 \text{ кН};$$

$$K_{уст} = \frac{P_{кр}}{P} = \frac{3750}{400} = 9,3.$$

т.е. коэффициент запаса устойчивости достаточно высок.

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

На рис. 18 а изображена нагруженная в своей плоскости рама, вертикальные элементы которой имеют моменты инерции $2J$, а горизонтальные элементы - J . Требуется:

- 1) установить степень статической неопределимости и выбрать основную систему;
- 2) написать каноническое уравнение;
- 3) построить эпюры M от единичных сил и от заданной нагрузки;
- 4) найти перемещения;
- 5) построить окончательные эпюры внутренних силовых факторов: M , Q и N для схемы на рис. 18а.

Пример. (рис. 18 а). Решение. Определяем степень статической неопределимости плоской рамы по формуле:

$$с.с.н. = 3K - III = 3 \cdot 1 - 1 = 2,$$

где K – количество замкнутых контуров; III – количество простых шарниров (т.е. соединяющих два стержня), при этом надо помнить, что шарнирно-неподвижная опора считается как один простой шарнир, а шарнирно-подвижная – как два. Для получения основной системы отбросим в заданной системе две «лишние связи», превратив тем самым заданную статически неопределимую систему в определимую, и приложим лишние неизвестные x_1 и x_2 (рис. 18 б).

2. Система канонических уравнений метода сил для дважды статически неопределимой системы запишется в виде:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0. \end{cases}$$

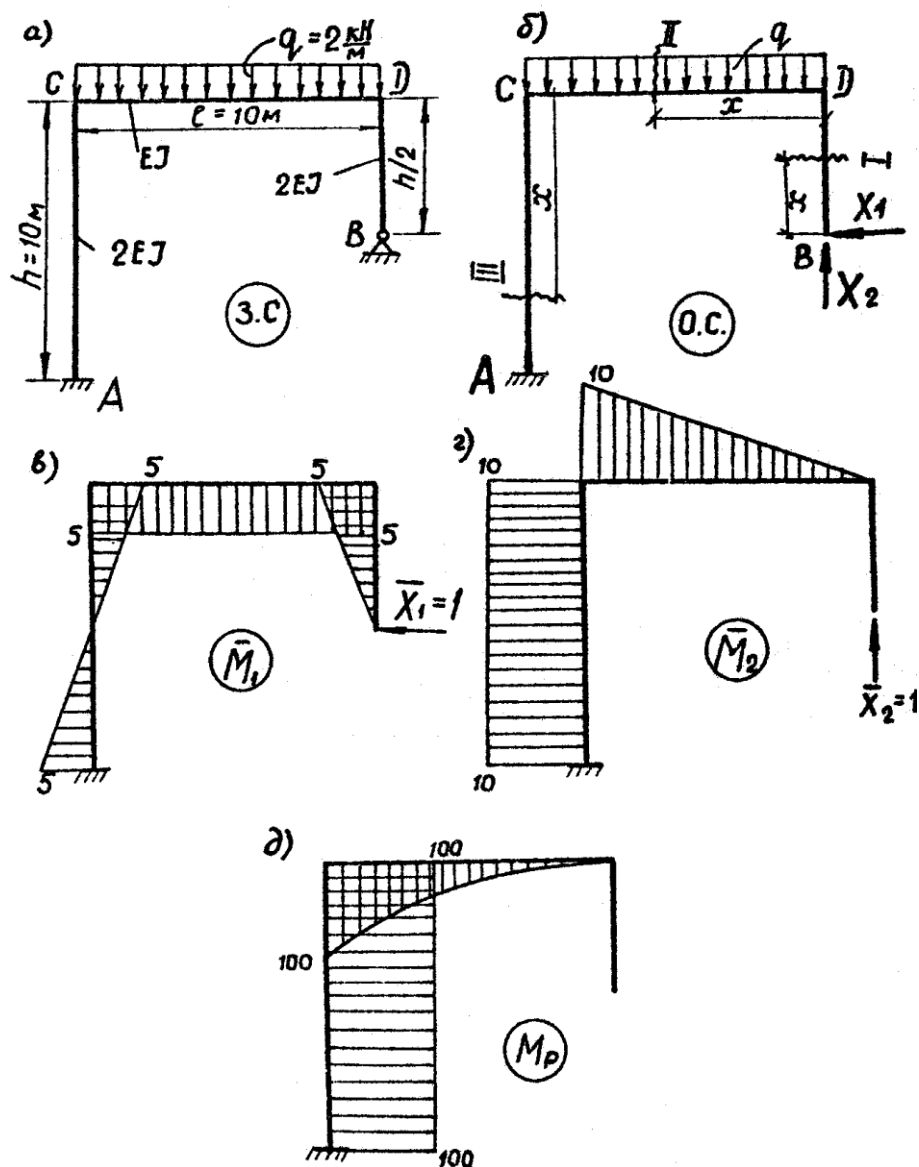


Рис. 18. Заданная и основная системы, единичные и грузовые эпюры \bar{M}_1 ,

\bar{M}_2 и M_p

3. Построение эпюр изгибающих моментов от единичных сил $\bar{x}_1=1$, $\bar{x}_2=1$ и заданной нагрузки проводится по известным правилам, установленным для балок (условимся строить эпюры M со стороны сжатых волокон).

Стержень BD $\left(0 \leq x \leq \frac{h}{2}\right)$

$$\bar{M}_1^I = -\bar{X}_1 \cdot x;$$

$$\bar{M}_1^I(x=0)=0, \bar{M}_1^I\left(x=\frac{h}{2}\right)=-\frac{h}{2}=-5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Стержень DC ($0 \leq x \leq l$)

$$\bar{M}_1^{II} = -\bar{X}_1 \cdot \frac{h}{2} = \text{const} = -5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Стержень CA ($0 \leq x \leq h$)

$$\bar{M}_1^{III} = -\bar{X}_1 \cdot \frac{h}{2} + \bar{X}_1 \cdot x;$$

$$\bar{M}_1^{III}(x=0) = -\bar{X}_1 \cdot \frac{h}{2} = -5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\bar{M}_1^{III}\left(x=\frac{h}{2}\right) = -\bar{X}_1 \cdot \frac{h}{2} + \bar{X}_1 \cdot h = 5.$$

Единичная эпюра \bar{M}_1 представлена на рис. 18 б.

Стержень DC ($0 \leq x \leq l$)

$$\bar{M}_2^{II} = -\bar{X}_2 \cdot x;$$

$$\bar{M}_2^{II}(x=0)=0, \bar{M}_2^{II}(x=l) = \bar{X}_2 \cdot l = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Стержень CA ($0 \leq x \leq h$)

$$\bar{M}_2^{III} = -\bar{X}_2 \cdot l = \text{const} = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Единичная эпюра \bar{M}_2 представлена на рис. 18 г.

Аналогичным образом построены эпюры M_p (рис. 18 д).

Стержень DC ($0 \leq x \leq l$)

$$\bar{M}_p^{II} = -q \cdot \frac{x^2}{2};$$

$$\bar{M}_p^{II}(x=0)=0, \bar{M}_p^{II}(x=l) = -q \cdot \frac{l^2}{2} = -2 \cdot \frac{10^2}{2} = -100 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Стержень CA ($0 \leq x \leq h$)

$$\bar{M}_p^{III} = -q \cdot \frac{l^2}{2} = \text{const} = -100 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

4. Определяем перемещения, входящие в канонические уравнения, пользуясь правилом Верещагина, по которому интегралы Мора находятся путем перемножения эпюр (при вычислении используем таблицу 3 в приложении).

Главные переменные δ_{11} и δ_{22} получим путем умножения единичных эпюр \bar{M}_1 и \bar{M}_2 самих на себя:

$$\delta_{11} = \sum \frac{\omega_1 \cdot y_{c_1}}{EJ} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5}{2EJ} + \frac{5 \cdot 10 \cdot 5}{EJ} + \frac{\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot 2}{2EJ} = \frac{312,5}{EJ};$$

$$\delta_{22} = \sum \frac{\omega_2 \cdot y_{c_2}}{EJ} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot 10}{EJ} + \frac{10 \cdot 10 \cdot 10}{2EJ} = \frac{833,3}{EJ}.$$

Побочные перемещения $\delta_{12} = \delta_{21}$ получим путем умножения эпюр \bar{M}_1 на \bar{M}_2 (знаки минус приняты в том случае, если сопрягаемые эпюры отложены в разные стороны):

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \frac{\omega_1 \cdot y_{c_2}}{EJ} = -\frac{\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5}{EJ} - \frac{\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 10}{2EJ} + \frac{\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5}{2EJ} = -\frac{250}{EJ}.$$

Перемещения от внешней нагрузки Δ_{1p} и Δ_{2p} получим при перемножении эпюр M_p на \bar{M}_1 на \bar{M}_2 соответственно:

$$\Delta_{12} = \sum \frac{\omega_p \cdot y_{c_1}}{EJ} = -\frac{\frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 10 \cdot 5}{EJ} + \frac{\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 100}{2EJ} - \frac{\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 100}{2EJ} = -\frac{1666,2}{EJ};$$

$$\Delta_{2p} = \sum \frac{\omega_p \cdot y_{c_2}}{EJ} = -\frac{\frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 10 \cdot \frac{3}{4} \cdot 10}{EJ} - \frac{10 \cdot 10 \cdot 100}{2EJ} = -\frac{7500}{EJ}.$$

Подставляя полученные коэффициенты в систему канонических уравнений метода сил, и сокращая EJ , получим систему

$$\begin{cases} 312,5X_4 - 250X_2 - 1666,7 = 0 \\ -250X_4 + 833,3X_2 - 7500 = 0 \end{cases}$$

решая которую, найдем лишние неизвестные

$$X_1 = 16,5 \text{ и } X_2 = 14.$$

5. Строим окончательные эпюры M_u , Q и N для основной системы.

Стержень $BD \left(0 \leq x \leq \frac{h}{2} \right)$

$$\bar{M}^I = -X_1 \cdot x;$$

$$\bar{M}^I(x=0)=0; \bar{M}^I\left(x=\frac{h}{2}\right)=-X_1 \cdot \frac{h}{2}=-16,5 \cdot 5=-82,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$Q^I = X_1 = \text{const} = 16,5 \text{ кН};$$

$$N^I = X_2 = \text{const} = 14 \text{ кН (сжатие)}.$$

Стержень DC ($0 \leq x \leq l$)

$$\bar{M}^{II} = -X_2 \cdot x - X_1 \cdot \frac{h}{2} - q \frac{x^2}{2};$$

$$\bar{M}^{II}(x=0)=-X_1 \cdot \frac{h}{2}=-16,5 \cdot 5=-82,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\bar{M}^{II}(x=l)=X_2 \cdot l - X_1 \cdot \frac{h}{2} - q \frac{l^2}{2} = -14 \cdot 10 - 16,5 \cdot 5 - \frac{2 \cdot 10^2}{2} = -42,5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Исследуем кривую на экстремум

$$\frac{dM^{II}}{dx} = Q^{II} = X_2 - qx|_{x=x_0} = 0, x_0 = \frac{X_2}{q} = \frac{14}{2} = 7 \text{ м};$$

$$_{max}M^{II}(x=x_0)=14 \cdot 7 - 16,5 \cdot 5 - \frac{2 \cdot 7^2}{2} = -33,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$Q^{II} = -X_2 + qx;$$

$$Q^{II}(x=0)=-X_2 = -14 \text{ кН};$$

$$Q^{II}(x=l)=-X_2 + ql = -14 + 2 \cdot 10 = 6 \text{ кН};$$

$$N^{II} = X_1 = \text{const} = 16,5 \text{ кН (сжатие)}.$$

Стержень СА ($0 \leq x \leq h$)

$$\bar{M}_p^{III} = X_1 \cdot x - X_1 \frac{h}{2} + X_2 \cdot l - q \cdot \frac{l^2}{2};$$

$$M^{III}(x=0)=-X_1 \frac{h}{2} + X_2 \cdot l - q \cdot \frac{l^2}{2} = -16,5 \cdot 5 + 14 \cdot 10 - \frac{2 \cdot 10^2}{2} = -42,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\begin{aligned} M^{III}(x=h) &= X_1 \cdot h - X_1 \frac{h}{2} + X_2 \cdot l - q \cdot \frac{l^2}{2} = \\ &= 16,5 \cdot 10 - 16,5 \cdot 5 + 14 \cdot 10 - \frac{2 \cdot 10^2}{2} = 122,5 \text{ кН}\cdot\text{м}; \end{aligned}$$

$$Q^{III} = -X_1 = \text{const} = -16,5 \text{ кН};$$

$$N^{III} = ql - X_2 = \text{const} = 2 \cdot 10 - 14 = 6 \text{ кН (сжатие)}.$$

Эпюры M_u , Q и N представлены соответственно на рис.19 а, б, в.

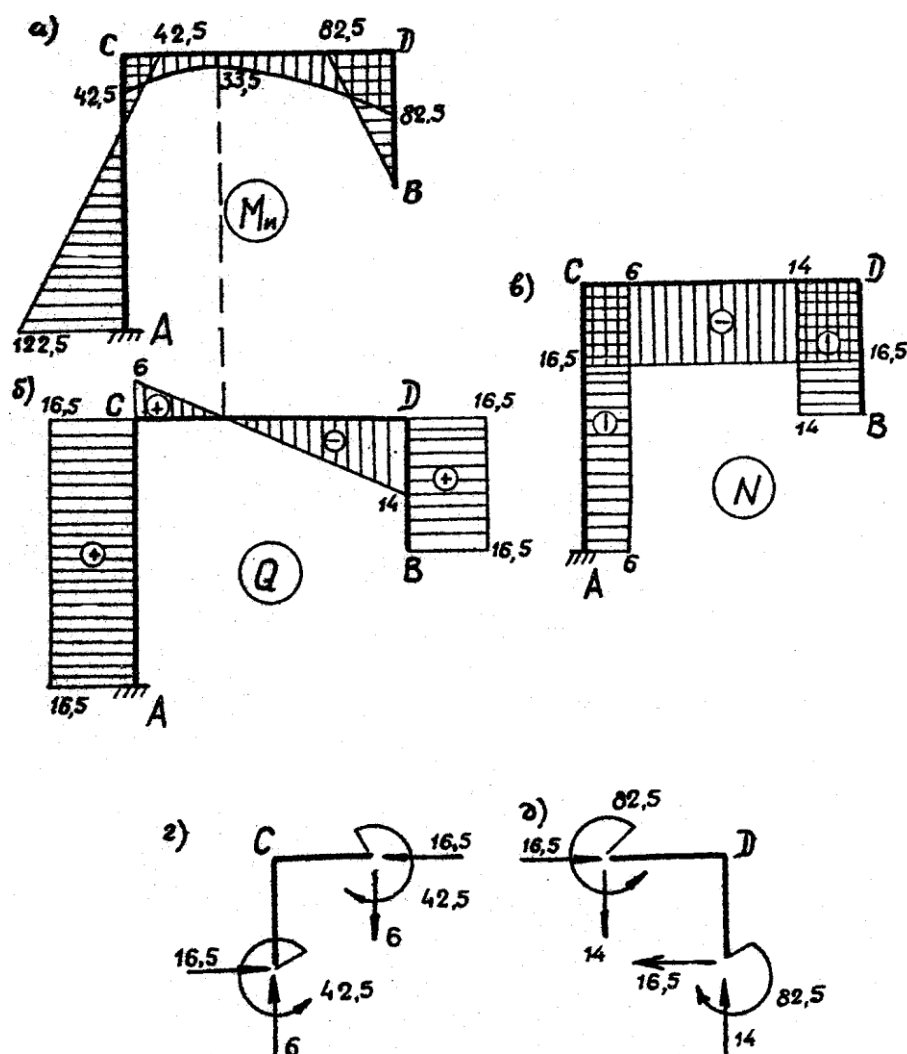


Рис. 19. Окончательные эпюры M_u , Q и N и узлы рамы C и D

Проверку правильности построения окончательной эпюры изгибающих моментов осуществляем путем перемножения окончательной эпюры M_u на одну из единичных эпюр, например, эпюры моментов \bar{M}_1 от силы $\bar{X}_1 = 1$. В результате такого перемножения получим перемещение рамы в точку B по направлению отброшенной горизонтальной связи. Если подсчитанное таким образом перемещение получится равным нулю, значит задача решена верно.

$$\delta_B^{zop} = \sum \frac{\omega_1 \cdot y_{c1}}{EJ} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 140 \cdot 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot 10}{EJ} - \frac{\frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 10 \cdot \frac{3}{4} \cdot 10}{EJ} - \frac{82,5 \cdot 10 \cdot 5}{EJ} + \frac{\frac{1}{2} \cdot 122,5 \cdot 10 \cdot 10}{2EJ} + \frac{\frac{1}{2} \cdot 42,5 \cdot 10 \cdot 10}{2EJ} = \frac{7729,2 - 7687,5}{EJ},$$

что составляет ~54%, т.е. приблизительно равно 0.

На рис. 19 г, д вырезаны узлы рамы *C* и *D*, к которым приложены все внутренние силовые факторы.

Задача 12

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ УДАРЕ

На двутавровую балку (1 №30) длиной $l=6$ м, свободно лежащую на двух жестких опорах (см. рис. 20), с высоты $h=10$ см падает груз $P=1000$ Н. Требуется:

- 1) найти наибольшее нормальное напряжение в балке;
- 2) решить аналогичную задачу при условии, что правая опора заменена пружиной, податливость которой $\alpha = 24 \cdot 10^{-3} \frac{\text{М}}{\text{кН}}$;
- 3) сравнить полученные результаты.

Решение: 1. Нормальные напряжения в балке при динамическом действии нагрузки определяются зависимостью

$$\sigma_{дин} = \sigma_{ст} \cdot K_{дин},$$

где $\sigma_{ст}$ - наибольшие нормальные напряжения при статическом действии нагрузки;

$K_{дин}$ - динамический коэффициент.

Для заданной схемы нагружения

$$\sigma_{ст} = \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{2000}{472 \cdot 10^{-6}} = 4,24 \text{ МПа}$$

(для I №30 $W_x=472 \text{ см}^3$).

Динамический коэффициент определяется по формуле:

$$K_{дин} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{ст}}},$$

где δ_{cm} - величина перемещения балки в точке действия статической нагрузки P .

Для вычисления δ_{cm} воспользуемся способом Верещагина, т.е. перемножения эпюр (см. рис.20 а, б, в, г).

$$\delta_{cm} = \sum \frac{\omega \cdot y_{c1}}{EJ} = \frac{1}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 7080 \cdot 10^{-8}} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2000 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2000 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right] = 0,094 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 0,094 \text{ см}.$$

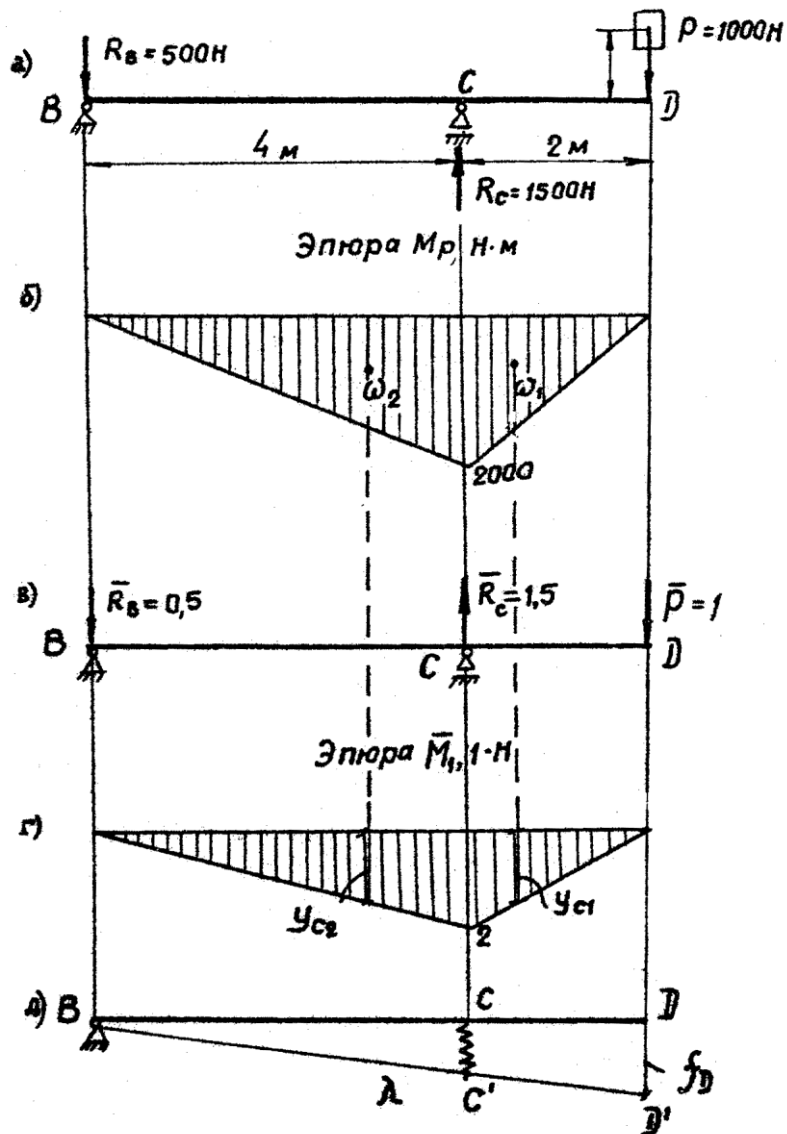


Рис. 20. Расчетные схемы и эпюры изгибающих моментов M_p и \bar{M}_1

Тогда

$$K_{дин} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 10}{0,094}} = 15,55.$$

Для первого варианта закрепления балки (рис. 20 а) максимальное нормальное напряжение в балке

$$\sigma_{дин} = \sigma_{ст} \cdot K_{дин} = 4,24 \cdot 15,55 = 65,72 \text{ МПа.}$$

2. Для второго варианта (см. рис. 20 д), когда правая опора балки (т. С) заменена пружиной, податливость которой α , осадка пружины под действием опорной силы R_c будет равна

$$\lambda = \alpha \cdot R_c = 24 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} \cdot 1500 = 3,6 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 3,6 \text{ см.}$$

Вертикальное перемещение точки D , в которой приложена нагрузка, за счет податливости пружины определяем из подобия $\triangle BCC'$ и $\triangle BDD'$ (рис. 20 д)

$$\frac{BC}{BD} = \frac{\lambda}{f_D}, \text{ откуда } f_D = \frac{6 \cdot 3,6}{4} = 5,4 \text{ см.}$$

Тогда полный прогиб балки в точке действия силы P определяется

$$\delta_D = \delta_{ст} + f_D = 0,094 + 5,4 = 5,494 \text{ см.}$$

Динамический коэффициент в этом случае

$$K_{дин} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 10}{5,494}} = 3,15.$$

Наибольшее нормальное напряжение в балке будет равно

$$\sigma_{дин} = \sigma_{ст} \cdot K_{дин} = 4,24 \cdot 3,15 = 14,4 \text{ МПа.}$$

3. Сравнение полученных величин показывает, что применение пружины снижает динамические напряжения почти в 5 раз.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица 1

Геометрические характеристики плоских сечений

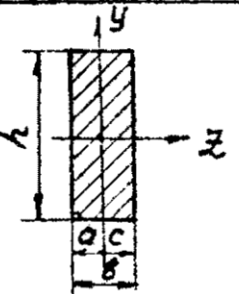
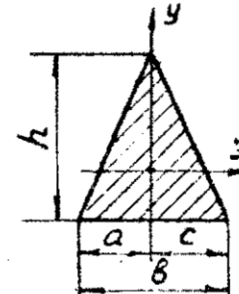
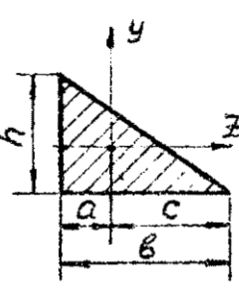
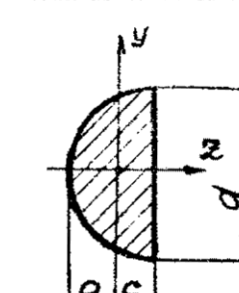
№ п/п	Форма сечения	Площадь сечения F	Координаты центра тяжести	Осевые моменты инерции	
				J_z	J_y
1		bh	$a = \frac{b}{2}$ $c = \frac{b}{2}$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$
2		$\frac{1}{2}bh$	$a = \frac{b}{2}$ $c = \frac{b}{2}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{hb^3}{48}$
3		$\frac{1}{2}bh$	$a = \frac{1}{3}b$ $c = \frac{2}{3}b$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{hb^3}{36}$
4		$\frac{\pi d^2}{8}$	$a = 0,288d$ $c = 0,212d$	$0,0246d^4$	$0,00686d^4$

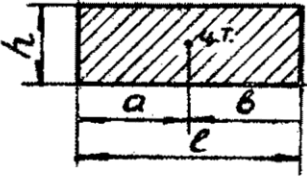
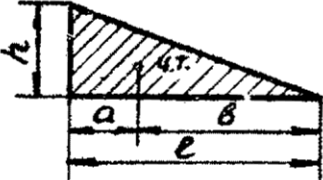

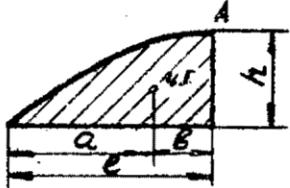

Таблица 2

Значения коэффициента продольного изгиба φ в зависимости от гибкости λ
для различных материалов

Гибкость λ	КОЭФФИЦИЕНТ φ ДЛЯ			
	Сталей Ст1,Ст2,Ст3, Ст4	Стали Ст5	Стали повышенного качества $\sigma_y \leq 320$ МПа	Чугуна
0	1.0	1.0	1.0	1.0
10	0.99	0.98	0.97	0.97
20	0.96	0.95	0.95	0.91
30	0.94	0.92	0.91	0.81
40	0.92	0.89	0.87	0.69
50	0.69	0.86	0.83	0.57
60	0.66	0.82	0.79	0.44
70	0.61	0.76	0.72	0.34
80	0.75	0.70	0.65	0.26
90	0.69	0.62	0.55	0.20
100	0.60	0.51	0.43	0.16
110	0.52	0.43	0.35	
120	0.45	0.37	0.3	
130	0.40	0.33	0.26	
140	0.36	0.29	0.23	
150	0.32	0.26	0.21	
160	0.29	0.24	0.19	
170	0.26	0.21	0.17	
180	0.23	0.19	0.15	
190	0.21	0.17	0.14	
200	0.19	0.16	0.13	

Таблица 3

Площади эпюр и расстояния до их центров тяжести

№ п/п	Вид эпюры	Площадь эпюры ω	Расстояние до ц.т.	
			a	b
1	Прямоугольник 	hl	$l/2$	$l/2$
2	Треугольник 	$\frac{1}{2}hl$	$1/3 l$	$2/3 l$
3	Квадратная парабола 	$\frac{1}{3}hl$	$1/4 l$	$3/4 l$
4	Квадратная парабола 	$\frac{2}{3}hl$	$5/8 l$	$3/8 l$
5	Квадратная парабола 	$\frac{2}{3}hl$	$1/2 l$	$1/2 l$

Литература

1. Сопротивление материалов. Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников всех специальностей технических высших учебных заведений, кроме строительных. - К.: Высшая школа, 1985.
2. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. - К.: Высшая школа. 1975.
3. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. - М.: Высшая школа, 1975.

Приложение: список дополнительной литературы представлен в методических указаниях [I].